Kruhová inverze

Möbiova rovina je euklidovská rovina doplněná o právě jeden nevlastní bod M^∞, kterému říkáme Möbiův bod. Tímto bodem neprochází žádná kružnice a naopak jím prochází každá přímka roviny. V takto doplněné rovině můžeme dobře definovat zobrazení, které se nazývá kruhová inverze.

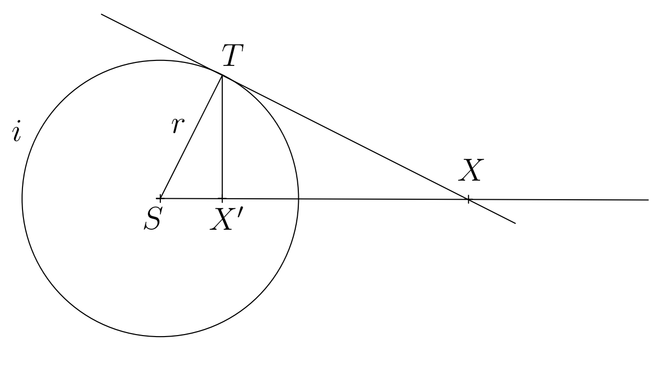
Mějme Möbiovu rovinu a v ní kružnici $i(S, r)$. Kruhovou inverzí vzhledem ke kružnici i rozumíme následující zobrazení:

1. Obrazem středu S kružnice i je bod M^∞.
2. Obrazem bodu M^∞ je střed S kružnice i.
3. Obrazem libovolného bodu $X \neq S$ a $X \neq M^\infty$ je bod X' ležící na polopřímce SX tak, že platí
$$|SX| \cdot |SX'| = r^2 \,.$$

Poznamenejme, že

- je-li bod X' obrazem bodu X, pak je i bod X obrazem bodu X',
- body na kružnici i jsou samodružné,
- bod ležící uvnitř kružnice i se zobrazí na její vnější bod a naopak.

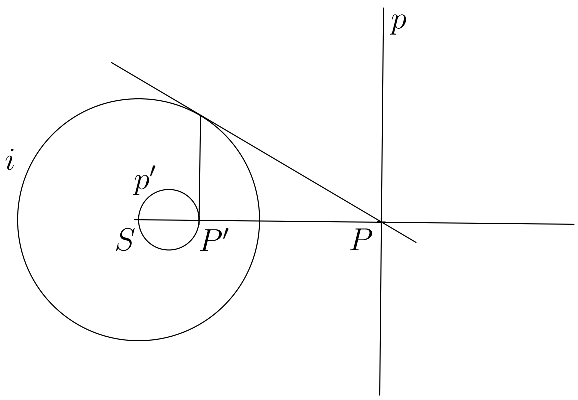
Konstrukce obrazu X' libovolného bodu $X \neq S$, $X \neq M^\infty$ a $X \notin i$ je založena na Euklidově větě o odvěsně. Tato konstrukce je znázorněna na následujícím obrázku pro bod X, ležící vně kružnice i.



Z bodu X sestrojíme tečnu kružnice i, bod dotyku popíšeme T. Z bodu T spustíme kolmici na přímku XS, pata této kolmice je hledaný obraz X'. Konstrukci lze použít též v opačném pořadí pro konstrukci obrazu bodu ležícího uvnitř kružnice i.

Nyní si rozmysleme, jak budou vypadat obrazy přímek v kruhové inverzi. Protože každá přímka prochází bodem M^∞, musí obraz každé přímky procházet bodem S.

- Přímka procházející bodem S se zobrazí sama na sebe.
- Sečna kružnice i ($S \notin i$) se zobrazí na kružnici určenou bodem S a prusečíky s kružnicí i.
- Tečna kružnice i se zobrazí na kružnici sestrojenou nad průměrem ST, kde T je její bod dotyku.
- Vnější přímka se zobrazí na kružnici uvnitř kružnice i, kterou nejsnáze určíme jako Thaletovu kružnici nad SP', kde P je pata kolmice spuštěné z S na zobrazovanou přímku.



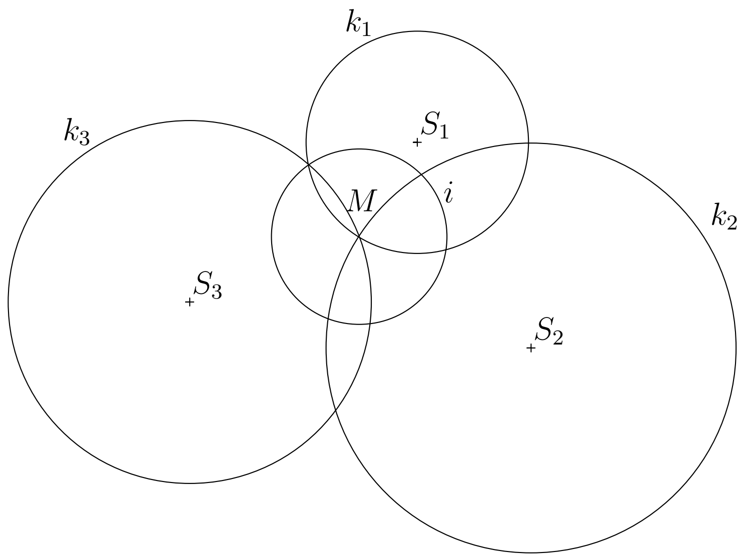
Podobně si rozeberme, jak vypadá obraz kružnice k.

- $S \in k$, k leží uvnitř i. Obrazem je přímka, jejíž konstrukce je zřejmá z předešlého obrázku.
- $S \in k$, k má vnitřní dotyk s i. Obrazem je tečna kružnice i.
- $S \in k$, k protíná i ve dvou bodech. Obrazem je sečna určená právě průsečíky kružnic k a i.
- Obrazem kružnice, která neprochází středem je opět kružnice.

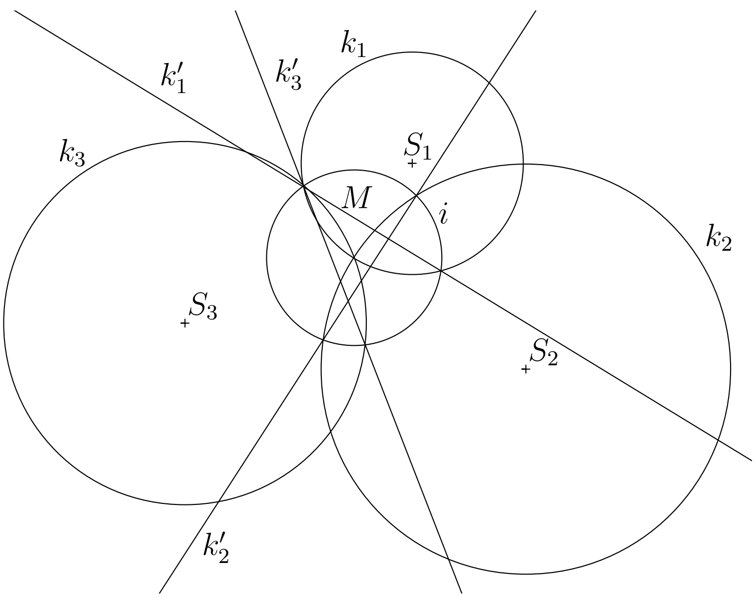
K typickým úlohám na kruhovou inverzi patří Apolloniovy úlohy, tj. úlohy na sestrojení kružnice, která je určena třemi podmínkami. Podmínkou se rozumí bod, přímka či kružnice. Tyto ulohy lze najít v různých textech, proto zde uvedeme jen jednu z nich.

Příklad 1. Jsou dány kružnice k_1, k_2, k_3 procházejí jedním bodem M. Sestrojte kružnici l, která se dotýká tří zadaných kružnic.

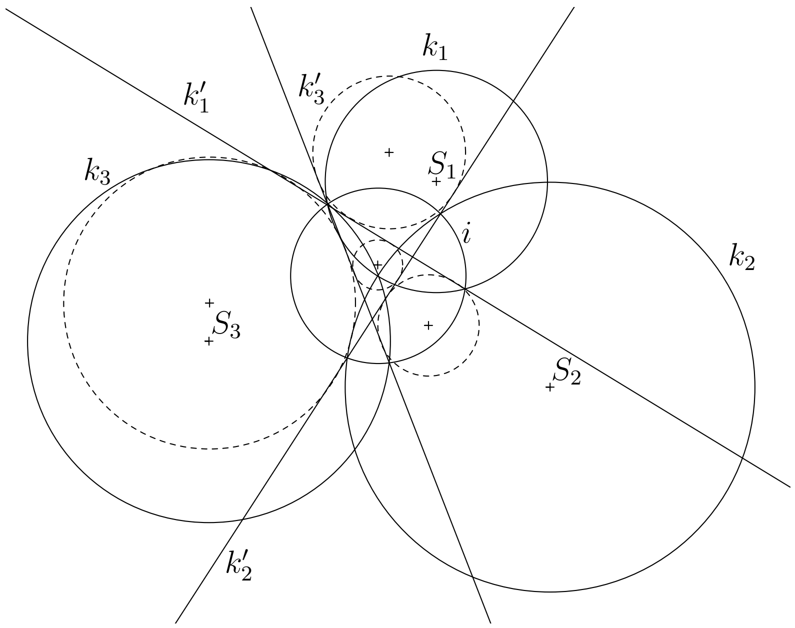
Řešení. Zvolme kružnici $i(M, r)$.



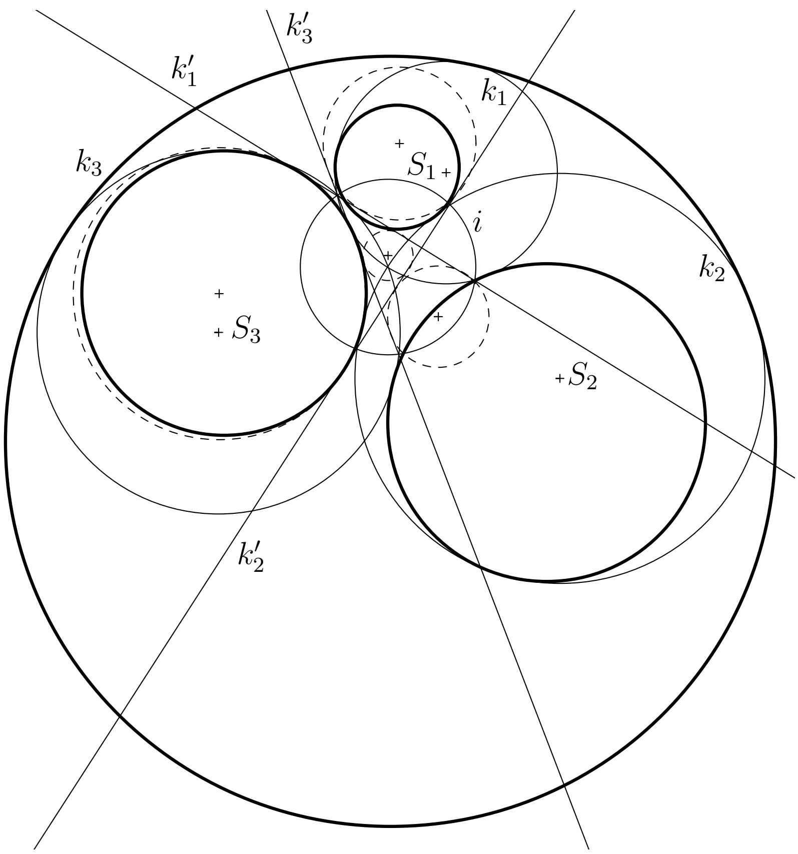
Zobrazme kružnice k_1, k_2, k_3 v kruhové inverzi vzhledem ke kružnici i.



Obrazy kružnic k_1, k_2, k_3 jsou přímky. Stačí tedz sestrojit kružnice, které se dotýkají daných přímek. Tedy kružnici vepsanou a připsané trojúhelníku (v obrázku čárkovaně).



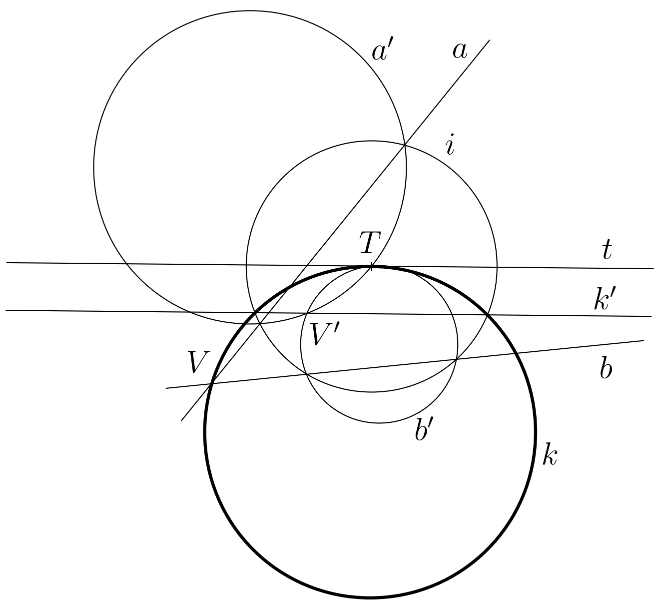
Nakonec použijeme znovu kruhovou inverzi dostaneme hledaná řešení.



Ještě poznamenejme, že diskusi Apollóniovy úlohy lze najít např. na `http://is.muni.cz/th/150476/prif_b/Bakalarska_prace.pdf`. Mnohem zajímavější (alespoň podle mého soudu) jsou úlohy s nepřístupnými průsečíky. Uveďme na ukázku dvě takové.

Příklad 2. Sestrojte kružnici k, která se dotýká přímky t v bodě T a prochází nepřístupným bodem V, což je průsečík různoběžek a, b.

Řešení. Uvažujme kruhovou inverzi vzhledem ke kružnici $i(T, r)$. Přímky a, b přejdou do kružnic a', b', které se (kromě T) protnou v bodě V'. Obrazem hledané kružnice k je přímka k', která prochází bodem V' a je rovnoběžná s přímkou t. (V obrázku je zobrazen i bod V, ale nijak se ke konstrukci nepoužívá.)



Příklad 3. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 protínající se ve dvou bodech. Sestrojte jejich společnou tětivu, jestliže jejich středy jsou nepřístupné a je přístupný jen jeden jejich průsečík.

Řešení. Uvažujme kruhovou inverzi vzhledem ke kružnici $i(A, r)$. Kružnice k_1, k_2 přejdou do přímek k_1', k_2', které se protnou v bodě B'. Protože body A, B, B' leží na jedné přímce, AB' je hledaná tětiva.