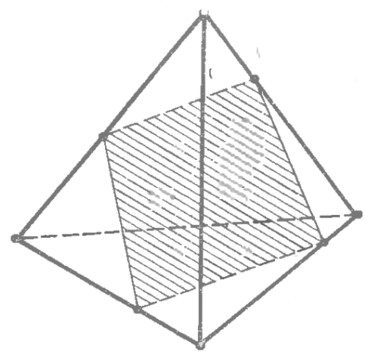
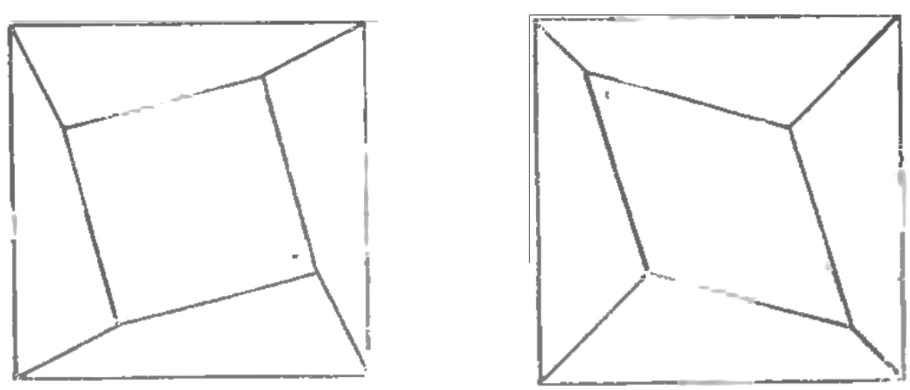
Deset úloh na rozvíjení prostorové představivosti

1. Ze 6 zápalek sestavte 4 rovnostranné trojúhelníky se stranou délky sirky.
2. Navrhněte praktický způsob, jak změřit (bez výpočtů) délku tělesové úhlopříčky cihly.
3. Může být následující řez čtyřstěnu narýsován správně?



4. Na následujících obrázcích jsou zobrazeny půdorysy dvou mnohostěnů (nemajících žádné další nezobrazené hrany). Je to možné?

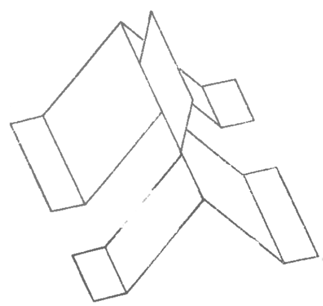


5. Je možné v rovině proříznout tenký otvor, který ji nerozdělí na více částí, a kterým je přitom možné protáhnout drátěný model (bez ohýbání modelu nebo roviny)

   a) krychle,

   b) čtyřstěnu?

6. Vystřihněte a složte z obdélníkového listu papíru (bez použití lepidla) následující skládačku:



7. Rozhodněte, jestli je možné sestavit

   a) šest,

   b) sedm

   stejných tužek tak, aby se libovolné dvě z nich dotýkaly.

8. Jistý člověk šel kilometr na sever, pak kilometr na západ a kilometr na jih. Ocitl se tak na místě, odkud vyšel. Jak je to možné?

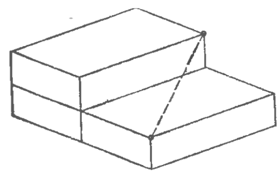
9. Sedm shodných krychliček je slepeno do „kříže“ (ke každé stěně vybrané krychličky je přilepena jedna krychlička). Je možné těmito útvary zcela zaplnit prostor?

10. Je možné povrch jednotkové krychle rozvinout do sítě, která se vejde do čtverce o rozměrech 3x3?

Řešení

1. Úlohu je třeba řešit v prostoru a sirky sestavit do tvaru pravidelného čtyřstěnu.

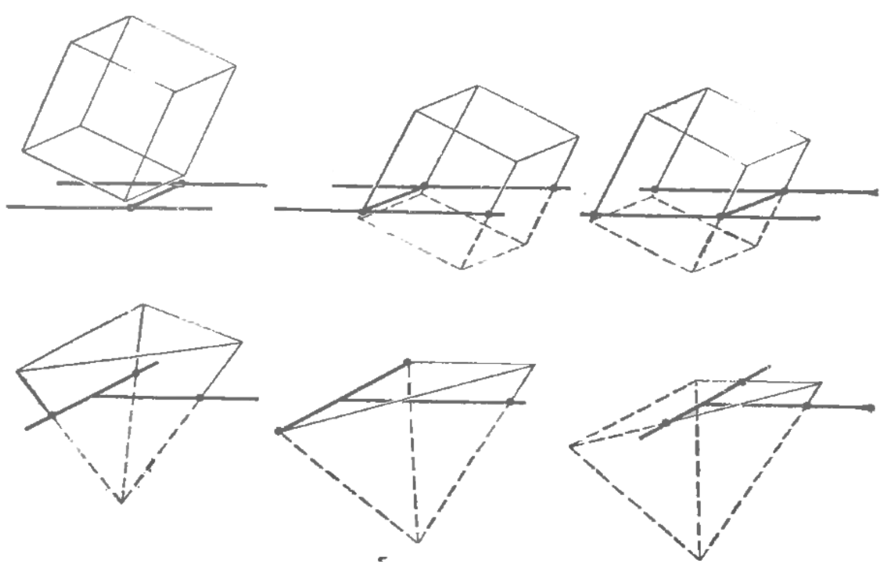
2. Např. udělat ze tří cihel „schod“ a úhlopříčku změřit.



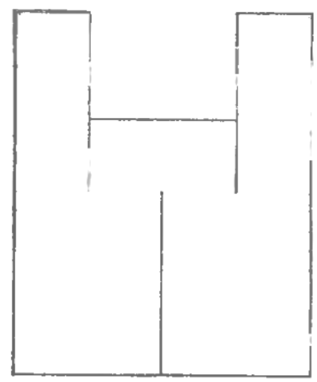
3. Vyšrafovaný čtyřúhelník nemůže být rovinný – prodloužení jeho protějších stran (znázorněných plnou čarou) protínají přední hranu čtyřstěnu ve dvou různých bodech. Přitom ale rovina a přímka v ní neležící mají nejvýše jeden průsečík.

4. Takové mnohostěny neexistují. Označíme-li vrcholy vnějšího čtverce obvyklým způsobem jako A, B, C, D a vrcholy vnitřního čtyřúhelníku jako A_1, B_1, C_1 a D_1, pak z řezů, rovnoběžných s rovinou $ABCD$, v prvním případě vidíme, že pro vzdálenosti a, b, c, d bodů A_1, B_1, C_1, D_1 od této roviny by muselo platit $a < b < c < d < a$, což samozřejmě nelze. Podobně v druhém případě jsou oba body B_1, D_1 rovině $ABCD$ blíže než oba body A_1, C_1, což ale znamená, že úsečky A_1C_1 a B_1D_1 se neprotínají a vnitřní čtyřúhelník tak nemůže být rovinný.

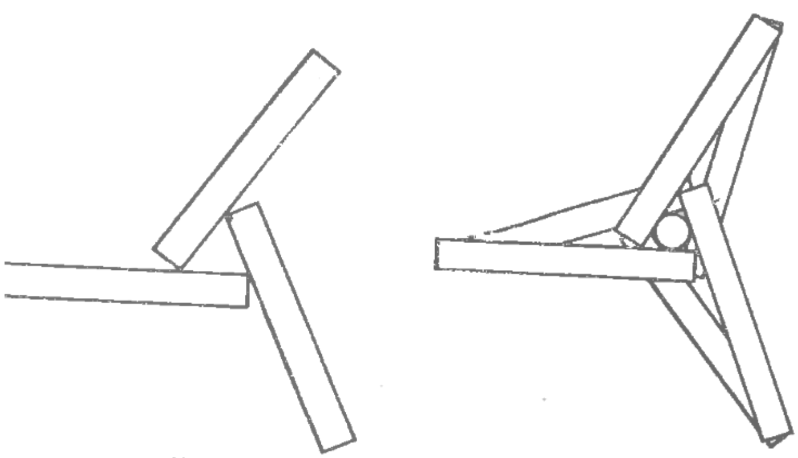
5. Je to možné – viz obrázek.



6. Po vystřižení podle obrázku již na to jistě přijdete sami `:-)`.



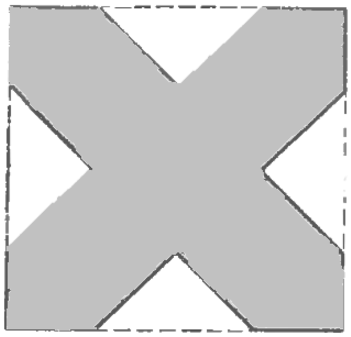
7. Na obrázku nejprve vidíme, jak sestavit 3 tužky, další tři pak na ně položíme analogicky, tak aby se každé dvě dotýkaly. To je navíc možné udělat tak (viz druhý obrázek), že průměr kružnice opsané třem dotykovým bodům je týž jako průměr tužky. Díky tomu je možné do této „stavebnice“ vsunout ještě sedmou tužku.



8. Je to možné – dokonce několika způsoby. Stačí se nacházet přesně 1 kilometr jižně od rovnoběžky, jejíž délka je celočíselným dělitelem jednoho kilometru (např. délky 250 m). Další možností je na začátku stát přímo na jižním pólu.

9. Ano. Stačí prostor rozřezat na vrstvy, v lichých vrstvách umístit středy křížů do políček o souřadnicích $[2n, 2n + 3k]$ a v sudých do políček $[2n + 1, 2n + 1 + 3k]$ pro libovolná $k, n \in \mathbb{N}$.

10. Ano. Viz obrázek (strana čtverce je $2\sqrt{2} < 3$).



Použitá literatura

[1] V.V. Prasolov, I.F. Šarygin - Stereometrické úlohy, Moskva, 1989.