

Modulární systém dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků JmK
v přírodních vědách a informatice
CZ.1.07/1.3.10/02.0024

GPS a matematika

Pracovní listy, Michal Bulant



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Princip fungování GPS

Hra *Najdi ztraceného lovce*

Pomůcky: pásmo/metr nebo provázek

1. Lovce je ztracen v lese a potřebuje dát záchrannému **Týmu** vysílačkou vědět svoji polohu.
student dobrovolník
2. Ztracený lovec vidí před sebou **Horu** vzdálenou 500m.
student dobrovolník ve vzdálenosti 5m od Lovce
3. Je možné na základě této informace určit polohu Lovce. Jak velký úsek je třeba prohledat, pokud předpokládáte, že chyba v odhadu vzdálenosti je nejvýše 10%?
4. Lovce se pozorněji rozhlédl a všiml si televizní **Věže**, vzdálené od něj cca 400m, úhel Hora-Lovec-Věž je přitom cca 120°.
student dobrovolník ve vzdálenosti 4m od Lovce
5. Je již nyní možné na základě této dodatečné informace lokalizovat přesné místo, kde se Lovce nachází?
6. Lovce ještě záchrannému týmu popsal výraznou borovici, která se nachází cca 300 za ním.
student dobrovolník ve vzdálenosti 3m od Lovce
7. Nyní by již měl být záchranný Tým schopen lokalizovat přesnou polohu *Lovce*. Zkuste rovněž diskutovat vliv chyb měření vzdálenosti a jiných poloh objektů na přesnost lokalizace.

Princip fungování GPS

Výpočet odmocniny:

V průběhu výpočtu polohy objektu na základě informací získaných ze satelitů je třeba řešit kvadratické rovnice, což vede na potřebu umět (velmi přesně) vypočítat odmocninu z daného čísla. Metod, kterými je možné postupovat je více, často používanou je tzv. Newtonova metoda (tečen), hledající řešení rovnice $y=f(x)=0$, jinými slovy průsečík grafu funkce $f(x)$ s osou x . Metoda je založena na tom, že v každém okamžiku konstruujeme lepší aproximaci výsledku než byla ta předchozí x a to tak, že v bodě $[x, f(x)]$ sestrojíme tečnu ke grafu funkce $f(x)$ a její průsečík s osou x prohlásíme za další aproximaci řešení.

Úkoly:

1. Z výše uvedeného popisu odvodte, že v případě hledání odmocniny z kladného reálného čísla a , tj. řešení rovnice $x^2 - a = 0$, dostaneme elegantní iterační předpis pro další krok výpočtu ve tvaru:
$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$
2. Určete uvedeným postupem s pomocí kalkulačky (ovšem s využitím pouze základních operací +, -, *, /) odmocninu z čísla $a=12345$, pokud za první aproximaci (naivně) uvážíte přímo číslo a . Určete chybu po deseti krocích od výsledku, který vypočítá Vaše kalkulačka pomocí vestavěné funkce pro druhou odmocninu.
3. Stejný úkol zopakujte s lepším počátečním odhadem 100 . Proveďte tentokrát pouze tři kroky výpočtu a opět porovnejte výsledek s hodnotou, kterou vrátí vestavěná funkce.

Lineární regrese – proložení přímky naměřenými daty:

Kdykoliv pracujete s naměřenými daty, je třeba počítat s tím, že budou zatíženy chybou. Nejinak je tomu i v případě výpočtu polohy pomocí měření doby přenosu signálu. Tento problém je řešen tím, že provedeme více měření než je minimální počet potřebný pro získání výsledků a najdeme výsledek, který v jistém smyslu nejlépe odpovídá naměřeným hodnotám. Ilustrujme tento postup na hledání rovnice přímky v rovině, odpovídající nejlépe bodům, o nichž předpokládáme, že by „měly“ na přímce ležet (a tedy, že chyba je dána vzdáleností od neznámé přímky). Součet druhých mocnin těchto vzdáleností se snažíme minimalizovat, proto hovoříme o **metodě nejmenších čtverců**. Poměrně snadno je možné odvodit, že mezi přímkami tvaru $f(x) = ax + b$ má nejmenší součet vzdáleností funkčních hodnot v bodech x_1, x_2, \dots, x_n od daných hodnot y_1, y_2, \dots, y_n funkce, kde a, b jsou řešeními soustavy dvou lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a(x_1^2 + \dots + x_n^2) + b(x_1 + \dots + x_n) &= (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) \\ a(x_1 + \dots + x_n) + b \cdot n &= (y_1 + \dots + y_n) \end{aligned}$$

Úkoly:

1. Pokuste se zdůvodnit, proč minimalizujeme druhé mocniny a nikoliv přímo vzdálenosti bodů od neznámé přímky
2. S využitím uvedených vztahů najděte rovnici přímky, která nejlépe odpovídá naměřeným bodům $[1,1.5], [2,1.6], [3,2.1], [4,3.0]$.

Práce s konkrétními daty – komplexní úkol:

V tabulce jsou uvedena skutečná data z několika satelitů – geocentrické souřadnice jsou uvedeny v metrech, čas přenosu signálu v nanosekundách. Vaším úkolem je s využitím vhodného SW (např. OpenOffice Calc) určit:

1. geocentrické souřadnice místa pozorovatele
2. popsat skutečné místo na Zemi, kde se pozorovatel nacházel

Číslo satelitu (<i>i</i>)	<i>x</i> [m]	<i>y</i> [m]	<i>z</i> [m]	<i>dt</i> [ns]
1	14177553.47	-18814768.09	12243866.38	70446329.64
2	15097199.81	-4636088.67	21326706.55	75142197.81
3	23460342.33	-9433518.58	8174941.25	78968497.2
4	-8206488.95	-18217989.14	17605231.99	69887173.01
5	1399988.07	-17563734.90	19705591.18	67231182.38
6	6995655.48	-23537808.26	-9927906.48	80796265.09

„Aplikace“ GPS a matematiky, umožněné masovým rozšířením GPS přístrojů

Geocaching hra pro všechny majitele GPS, spojující prostřednictvím internetu tisíce lidí po celém světě (blíže viz www.geocaching.com, www.geocaching.cz). Samotná hra samozřejmě nevyžaduje zvláštní matematické ani geografické znalosti, nicméně její popularitu je možné i ve výuce využít několika způsoby.

Kešky s matematickým obsahem:

Některé tzv. „kešky“ neudávají přímo adresu se schránkou, ale tuto je potřeba získat z indicií, které jsou uvedeny v jejím popisu (jedná se o tzv. *mystery caches*). Nežádka pak kešky obsahují různé logické hříčky či přímo matematické úlohy, které je třeba vyřešit. Zde pro Vaši inspiraci uvádíme seznam několika z nich (názvy jsou na webu uváděny bez diakritiky):

Brno

1. <http://coord.info/GC2JEJE> – Bonusovka BF3 (dělitelnost)
2. <http://coord.info/GC1RPAX> - Master of Mystery #8 – Brno (zajímavá série logických úloh z celého světa – asi nejtěžší z úloh je zaměřena na prostorovou představivost)
3. <http://coord.info/GCM1B1> - Trigonometrická cache (velmi pěkná úloha na hledání težiště lichoběžníka; cache je -dočasně? - zrušena, zadání nicméně zůstává k dispozici)
4. <http://coord.info/GC17X89> – Divide et impera (není přímo matematická, ale může sloužit v informatice jako demonstrace metody dělení intervalu)
5. <http://coord.info/GC12NFZ> - Computationally Intensive I (zaměřená na rozkládání velkých prvočísel a popis využití tohoto problému v kryptografii)
6. <http://coord.info/GC197GF> - Computationally Intensive II (aplikace počítání zbytkových tříd v kryptografii)
7. <http://coord.info/GC17N53> - SOS vesnicka (logická úloha na úrovni 6. třídy ZŠ)
8. <http://coord.info/GC13V4M> – Součin a součet (klasická logická hádanka na známý součin a součet (cache je zrušena, zadání nicméně zůstává k dispozici)
9. <http://coord.info/GCY9NW> – Project Enigma – série zaměřená na vysvětlení pojmů a metod z klasické i moderní kryptografie

ČR

1. <http://coord.info/GCY9NW> – Matematická Cache (zaměřená na práci se souřadnicemi)
2. <http://coord.info/GC1AAF0> – Matematická Cache (úlohy na pohyb)
3. <http://coord.info/GC2RHZJ> – Matematická olympiada (úlohy na motivy Matematického klokanu)
4. <http://coord.info/GC1W7ZM> – Matematická (kombinatorické úlohy)
5. <http://coord.info/GC228KJ> – Matematická (standardní „potkávací“ úloha na geometrickou pravděpodobnost)

Svět – záložky obsahující seznam vybraných matematických keší:

1. Got Math (42 záznamů) - <http://www.geocaching.com/bookmarks/view.aspx?guid=9e6fa65c-2500-4cb5-b6dc-801c054c8b03>
2. Math Triangle (21 záznamů) - <http://www.geocaching.com/bookmarks/view.aspx?guid=b1db124d-437a-46c1-ad93-a1e1a5aacb1f>

Virtuální matematický geocaching:

Popularitu geocachingu využívají některé servery, provozující virtuální hledání pokladů. Za velmi zajímavý považuji projekt **MathCaching** serveru MathBits.com, který pokrývá mnoho oblastí matematiky (Basic Math, PreAlgebra, Algebra 1, Geometry, Algebra 2, Trigonometry, PreCalculus) a zajímavou formou procvičuje i náročnější témata. V každé oblasti musí student vyřešit deset úkolů (složených z dalších podúkolů), teprve po vyřešení každého z úkolů dostane „klíč“ k úkolu dalšímu. Na ukázkou uvádíme úvodní list k tématu *PreCalculus*.

Name _____

ANSWER Sheet

Show all work on this paper. There is a printable "Certificate" available when you find the last hidden box.



Box 1: 1. If $f(x) = 3x + 2$ and $g(x) = x^2 + 1$

a) calculate $f^{-1}(4)$

b) calculate $(g \circ f)(5)$

c) calculate $(f + g)(-2)$

2. If $f(x) = x^2 + 3x + 4$, then $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ is which choice?

1. $h/h = 1$

2. $x^2 + 3x + 4 + h$

3. $6x + h + 8.$

4. $2x + h + 3$

3. Given $f : x \rightarrow x^2 - x$, find all $x \in D(f) \ni f(x) = 6.$

Box 2:

1.

2.

3.

Box 3:

1.

2.

3.

4.