Matematika (a fyzika) schovaná za GPS

Michal Bulant

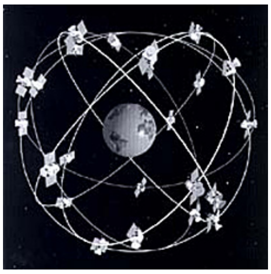
Masarykova univerzita
Přírodovědecká fakulta
Ústav matematiky a statistiky

Brno, 2011

Poznámky

Global Positioning system

- 27 satelitů (24 aktivních, 3 záložní)
- výška cca 19 300 km na povrchem Země, cca 2 oběhy denně
- z každého místa na Zemi viditelných 4–12 satelitů
- od 1. května 2000 zrušeno umělé zkreslování dat (SA – selective availability)



Poznámky

Výpočet pozice – úvod

Satelity obíhající (nejde o stacionární družice) Zemi vysílají zprávy obsahující:

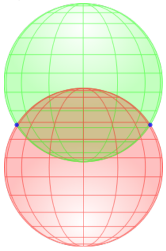
- čas vyslání zprávy
- polohu satelitu
- systémovou informaci o stavu a (přibližné) pozici ostatních satelitů

Z těchto informací chce příjemce (GPS přijímač) odvodit informaci o své poloze.

Poznámky

Výpočet pozice

Přijímač na základě polohové a časové informace $[x_i, y_i, z_i, t_i]$ od alespoň 4 satelitů vypočte svoji zdánlivou vzdálenost r_i od jednotlivých vysílačů (*pseudorange*) za předpokladu, že se signál šíří rychlostí světla. Vypočtená vzdálenost od satelitu spolu s jeho polohou při vyslání signálu udává sféru (povrch koule), na níž přijímač leží. Průsečíkem takových dvou sfér je pak kružnice, obsahující daný bod,



Poznámky

Výpočet pozice – pokračování

Průsečíkem třetí sféry s touto kružnicí jsou pak (obvykle) 2 body. Výslednou pozici je pak možné určit jako:

- ten z průsečíků, který je blíže povrchu Země (v obvyklém případě GPS přijímače v autě či v ruce)
- ten z průsečíků, který je blíže **čtvrté sféře** – v tomto případě je rovněž možné pomocí GPS určit nadmořskou výšku, v níž se přijímač pohybuje.

Poznámky

Konečně slíbená matematika

Pro zjednodušení výpočtů je možné bez újmy na obecnosti zvolit kartézskou soustavu souřadnic tak, že středy sfér (tj. pozice vysílajících satelitů) jsou v rovině xy (tj. $z = 0$), jeden ze středů dále umístíme v počátku a druhý na ose x. Uvažujme tedy tři sféry se středy v bodech $[0, 0, 0], [u, 0, 0], [v, w, 0]$ a poloměry r_1, r_2, r_3 a dostaneme tak pro hledanou pozici $[x, y, z]$ rovnice

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= r_1^2 \\
(x - u)^2 + y^2 + z^2 &= r_2^2 \\
(x - v)^2 + (y - w)^2 + z^2 &= r_3^2
\end{aligned}
$$

Poznámky

Konečně slíbená matematika

$$x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$$
$$(x-u)^2 + y^2 + z^2 = r_2^2$$
$$(x-v)^2 + (y-w)^2 + z^2 = r_3^2$$

Odečtením 2. rovnice od první a snadnou úpravou dostaneme $x = \frac{1}{2u}(r_1^2 - r_2^2 + u^2)$. odkud po dosazení za x do první rovnice dostaneme vztah
$$r_1^2 - \frac{(r_1^2 - r_2^2 + u^2)^2}{4u^2} = y^2 + z^2.$$
Podmínkou pro řešitelnost (tj. pro to, že se první dvě sféry vůbec protínají) je $2ur_1 \geq r_1^2 - r_2^2 + u^2$, neboli $r_2^2 \geq (u - r_1)^2$, či $r_1 + r_2 \geq u \geq r_1 - r_2$ (tuto podmínku lze samozřejmě takřka ihned vidět z obrázku). Při splnění odvozené podmínky již vypočteme i souřadnici y pomocí dosazení do třetí rovnice. Souřadnici z pak lze dopočítat např. jako $z = \pm\sqrt{r_1^2 - x^2 - y^2}$.

Poznámky

Jak ale počítat prakticky odmocniny?

V důsledku je třeba řešit nelineární soustavu rovnic o více neznámých – již jsme ukázali jeden způsob, jakým ji lze převést na postupné řešení rovnic o jedné neznámé. Newton-Raphsonova metoda je iterativní metoda na hledání kořenů reálných funkcí (obecně více proměnných). Ukažme zde alespoň pro ilustraci její použití pro odvození elegantního postupu výpočtu druhé odmocniny.

1. Mějme dánu diferencovatelnou funkci $f(x)$ a aproximaci jejího kořene x_0.
2. Postupně počítejme další iterace pomocí vztahu $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Pro výpočet druhé odmocniny z a (tj. hledání kořene funkce $f(x) = x^2 - a$) tak dostáváme iterační postup $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$.

Vypočtěme $\sqrt{12}$ s $x_0 = 3$: $x_1 = \frac{3+4}{2}$, $x_2 = \frac{7/2+24/7}{2} = 97/28 \approx 3{,}46429$, přitom $\sqrt{12} \approx 3{,}46410$.

Poznámky

Fyzika a praxe nám to trochu zkomplikuje

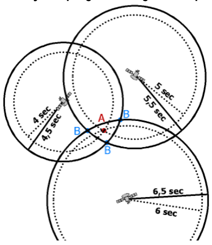
Do ideálního stavu ukázaného dříve se nám ale vloudí více či méně závažné chyby:

1. Satelity disponují vysoce přesnými atomovými hodinami, to ale naše kapesní GPSka neumí.
2. Šíří se signál skutečně rychlostí světla i při průchodu ionosférou?
3. Signál se odráží od různých terénních překážek, budov apod.
4. Do hry velmi zásadně vstupuje i speciální a obecná teorie relativity.

Poznámky

Jak se vyrovnat s chybami – hodiny v přijímači

S nepřesností levných hodin v GPS přijímači se vyrovnáme poměrně snadno – k tomu nám slouží právě čtvrý (a případně další) satelit, který jsme dosud ve výpočtech nepoužili. V praxi tak dostáváme čtyři nebo více rovnic o čtyřech neznámých $(x, y, z, error)$. Na obrázku je pro zjednodušení ukázán 2D případ, kde hodiny v přijímači jsou zpožděny o $0{,}5\,s$.



Poznámky

Jak se vyrovnat s chybami – hodiny v přijímači

Pokud je vidět více než čtyři satelity, máme tzv. přeurčený systém rovnic a do hry vstupuje možnost "vybrat si" z několika možností tu nejlepší – v takovém případě se poloha aproximuje pomocí metody nejmenších čtverců.
Metoda slouží k rekonstrukci funkce f z hodnot $f_0, \dots, f_n$ naměřených v uzlových bodech $a_0, \dots, a_n$. Tuto rekonstrukci hledáme vzhledem k danému modelu – dané posloupnosti funkcí (obecně více proměnných) $g_0(x), \dots, g_m(x), \dots$ – ve tvaru

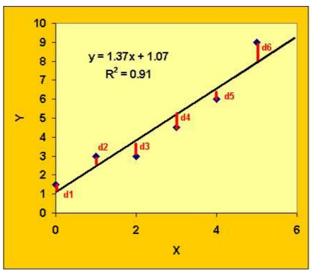
$$y_m(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j g_j(x).$$

Cílem je při tom minimalizovat "součet čtverců"

$$\sum_{i=0}^{n} \big(f_i - y_m(a_i)\big)^2.$$

Poznámky

Aproximace metodou nejmenších čtverců



Poznámky

Ukažme si použití této metody v nejjednodušším případě, kdy máme dáno n bodů ($[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$) a hledáme přímku, která nejlépe *vystihuje* rozložení těchto bodů.
Hledáme tedy funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální. S využitím diferenciálního počtu lze snadno odvodit následující tvrzení.

Věta

Mezi přímkami tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ má nejmenší součet čtverců vzdáleností funkčních hodnot v bodech $x_1, \dots, x_n$ od hodnot y_i funkce splňující

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$
$$a \sum x_i + b \cdot n = \sum y_i$$

Poznámky

Metoda nejmenších čtverců – příklad

Příklad

Metodou nejmenších čtverců určete regresní přímku odpovídající naměřeným datům:

x	1	2	3	4
y	1.5	1.6	2.1	3.0

Řešení

Data je vhodné seřadit v tabulce podle schématu:

x	y	xy	x^2
1	1.5	1.5	1
2	1.6	3.2	4
3	2.1	6.3	9
4	3	12	16
10	8.2	23	30

Odtud $a = 0{,}5$, $b = 0{,}8$.

Poznámky

Jak se vyrovnat s chybami – teorie relativity

GPS ukazuje jeden z nejpraktičtějších důsledků teorie relativity – pokud bychom ji nevzali v potaz, bude metoda GPS prakticky nepoužitelná. Atomové hodiny pracují s přesností na nanosekundy (ns $= 10^{-9}$ s), abychom byli schopni zaručit přesnost zjištění pozice na cca 10 m, je třeba umět určit přesnost času vysílače s přeností cca 30 ns. Přitom se satelity vzhledem k Zemi pohybují rychlostí cca 14 000 km/h.

- Do hry tak vstupuje speciální teorie relativity, neboť přijímač a vysílač jsou vůči sobě v pohybu, dochází ke zpomalení hodin vysílače oproti pozorovateli (*dilatace času*) o $\frac{v^2}{2c^2} \approx \frac{4^2}{2 \cdot (3 \cdot 10^5)^2} \approx 10^{-10}$, tj. asi o 7μs/den.
- Další ještě významnější efekt představuje obecná teorie relativity, která předpovídá, že hodiny poblíž masivního objektu (Země) jdou pomaleji než hodiny vzdálenější (díky většímu zakřivení prostoročasu). Z povrchu Země vidíme tedy satelitní hodiny jdoucí rychleji než tytéž hodiny umístěné na Zemi o cca 45μs za den.

Poznámky

Jak se vyrovnat s chybami – teorie relativity

- Nezapočítáním teorie relativity bychom tak dostali chybu v řádu 38μs za den, což v důsledku znamená cca 10km chybu v určení pozice.
- Tato chyba je opravena umělým zpomalením atomových hodin umístěných v satelitech oproti hodinám na Zemi (10,22999999543 MHz oproti 10,23 MHz).

Poznámky

Použitá literatura

- **Wikipedia**, The Free Encyclopedia, `www.wikipedia.org`.
- Neil Ashby, **Relativity and the Global Positioning System**. *Physics Today*, May 2002.

Děkuji za pozornost!

Poznámky

Poznámky