Křivky kolem nás

19. 10. 2011

Co nás dnes čeká

1. Co je křivka
2. Spirály
3. Klotoidy
4. Evolventy
5. Cykloidy
6. Konchoidy
7. Rhodonea
8. Cassini
9. Další křivky

Přístup k funkcím

1. Funkce f je předpis, který reálnému číslu x přiřadí reálné číslo $y = f(x)$.
2. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z\}$.

Příklady

1. $f(x) = 2^x$, $f(x) = x + 3$, $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $f(x) = \ln x$, $f(x) = 5$ jsou funkce
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$, $\{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ nejsou funkce v našem pojetí

Pohyb a křivka

Nechť I je interval (případně celá množina $\mathbb{R}$). Zobrazení $p : I \to \mathbb{R}^2$ nazýváme pohyb.

Množinu bodů v rovině $\mathcal{C}$ nazýváme křivka, jestliže existuje pohyb p takový, že $p(I) = \mathcal{C}$.

Příklady

1. Přímka $x = 1$ je křivkou, protože je dána pohybem $p(t) = (1, t)$, kde $t \in \mathbb{R}$.
2. Graf funkce $y = 2^x$ je křivkou, protože je dán pohybem $p(t) = (t, 2^t)$, kde $t \in \mathbb{R}$.

Pohyb a křivka

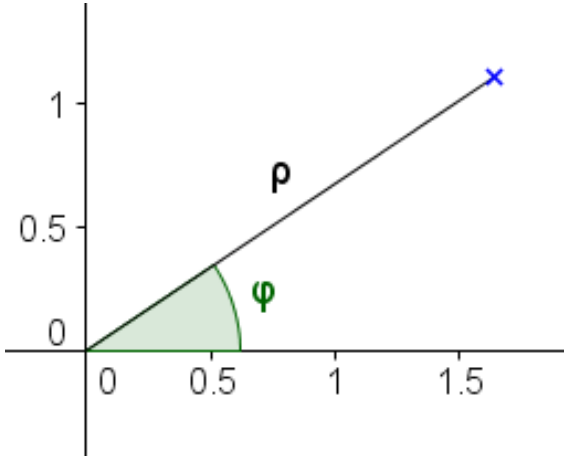
1. Množina $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ je křivkou, protože je dána pohybem $p(t) = (\cos t, \sin t)$, kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
2. Úsečka AB, kde $A[0, 0]$, $B[1, 1]$ je křivkou, protože je dána pohybem $p(t) = (t, t)$, kde $t \in \langle 0, \sqrt{2} \rangle$.

Nechť je dána křivka $\mathcal{C} = p(I)$, potom pohyb p nazýváme parametrizace křivky C, mluvíme také o parametrickém vyjádření křivky $\mathcal{C}$.

Pro danou křivku může existovat i více parametrických vyjádření.

Vyjádření v polárních souřadnicích

Někdy bývá výhodné vyjádřit křivku v tzv. polárních souřadnicích $\rho = f(\varphi)$, kde φ je úhel, který svírá průvodič s kladnou poloosou x a ρ je délka průvodiče.



Příklad

Kružnice se středem v počátku a poloměrem 1 má v polárních souřadnicích vyjádření $\rho = 1$.

Spirály

Nyní se již dostáváme k jednotlivým typům křivek.

Pohybuje-li se bod po přímce, která se zároveň otáčí kolem pevného bodu, dostaneme křivku, které říkáme spirála. Podle druhu pohybu po přímce rozlišujeme několik typů spirál.

Archimédova spirála

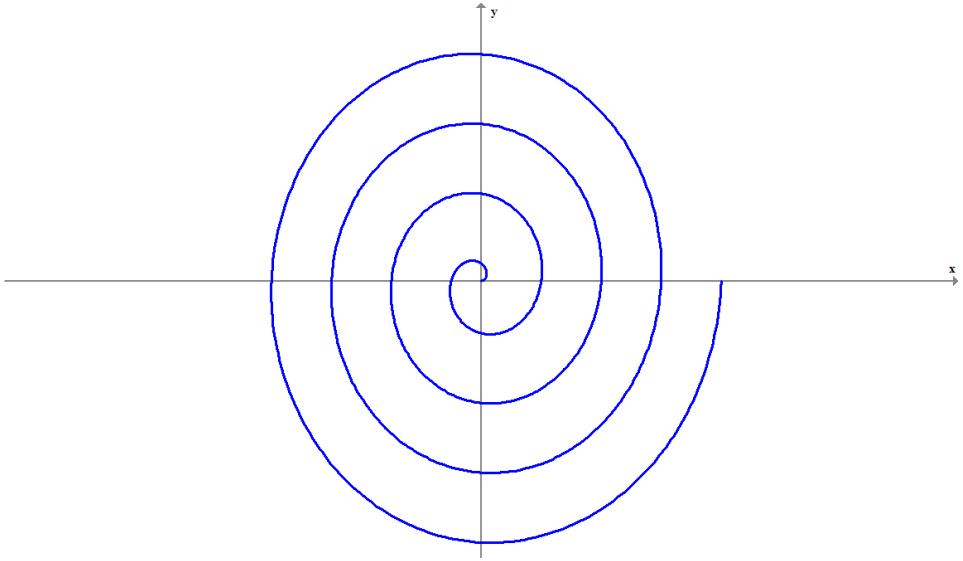
Pokud se bod pohybuje po přímce konstantní rychlostí, potom dostáváme Archimédovu spirálu.

Délka průvodiče je přímo úměrná úhlu φ, dostáváme tak rovnici křivky v polárních souřadnicích

$$\rho = k \cdot \varphi$$

Archimédova spirála

Tento tvar dostáváme, pokud například namotáváme nit, drát či pružinu.



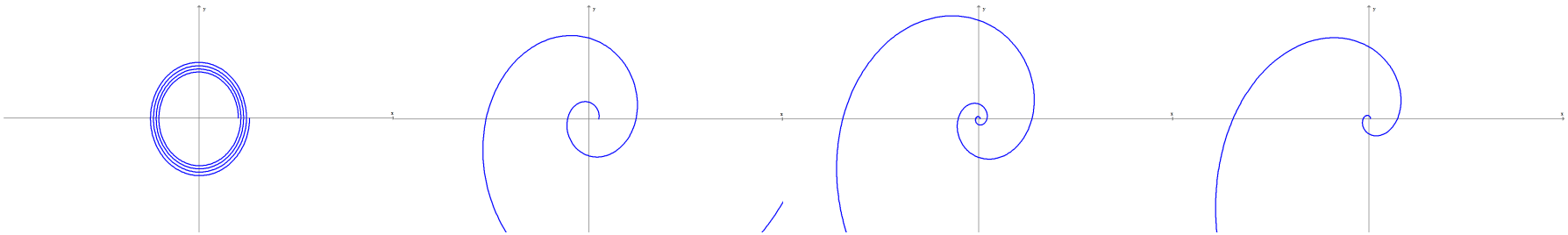
Logaritmická spirála

Logaritmickou spirálu dostáváme, pokud délka průvodiče ρ roste exponenciálně s velikostí úhlu φ.

Přímo z definice dostáváme rovnici logaritmické spirály v polárních souřadnicích

$$\rho = a \cdot e^{b\varphi}$$

Logaritmická spirála



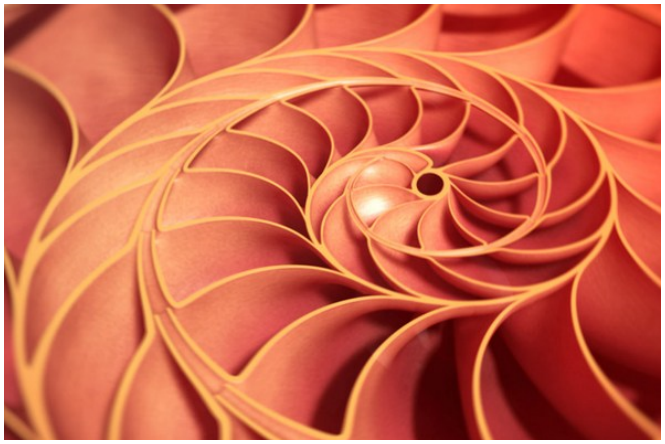
- $b = 0,01$
- $b = 0,25$
- $b = 0,3$
- $b = 0,5$

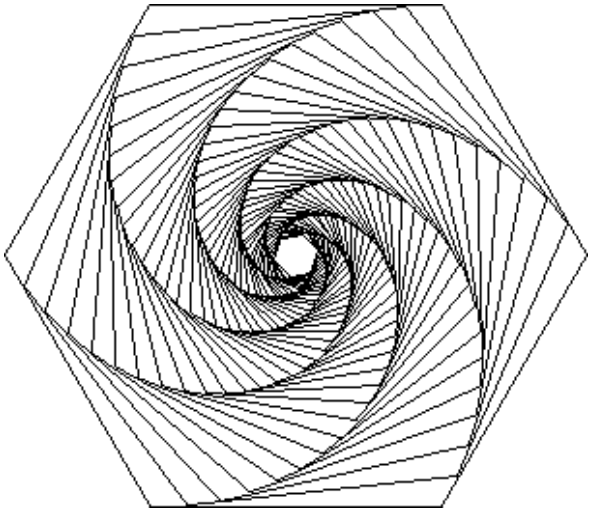
Vlastnosti

- Někdy se též nazývá růstová spirála
- Tečna v daném bodě je vždy kolmá k průvodiči tohoto bodu
- Prvním, kdo se logaritmickou spirálou zabýval, byl René Descartes. Dále pak například Jacob Bernoulli.

Logaritmická spirála - výskyt

Logaritmická spirála - výskyt

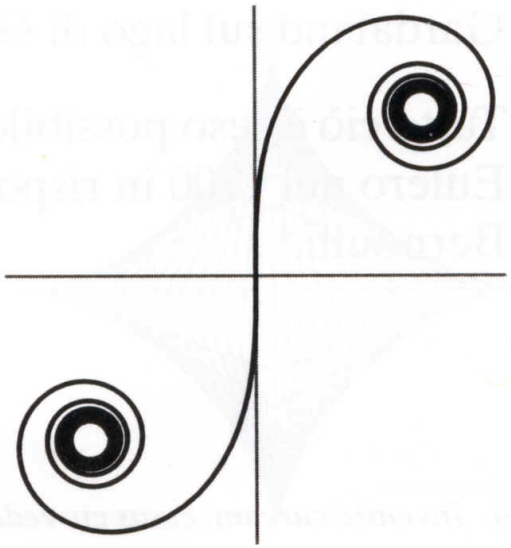




Klotoidy

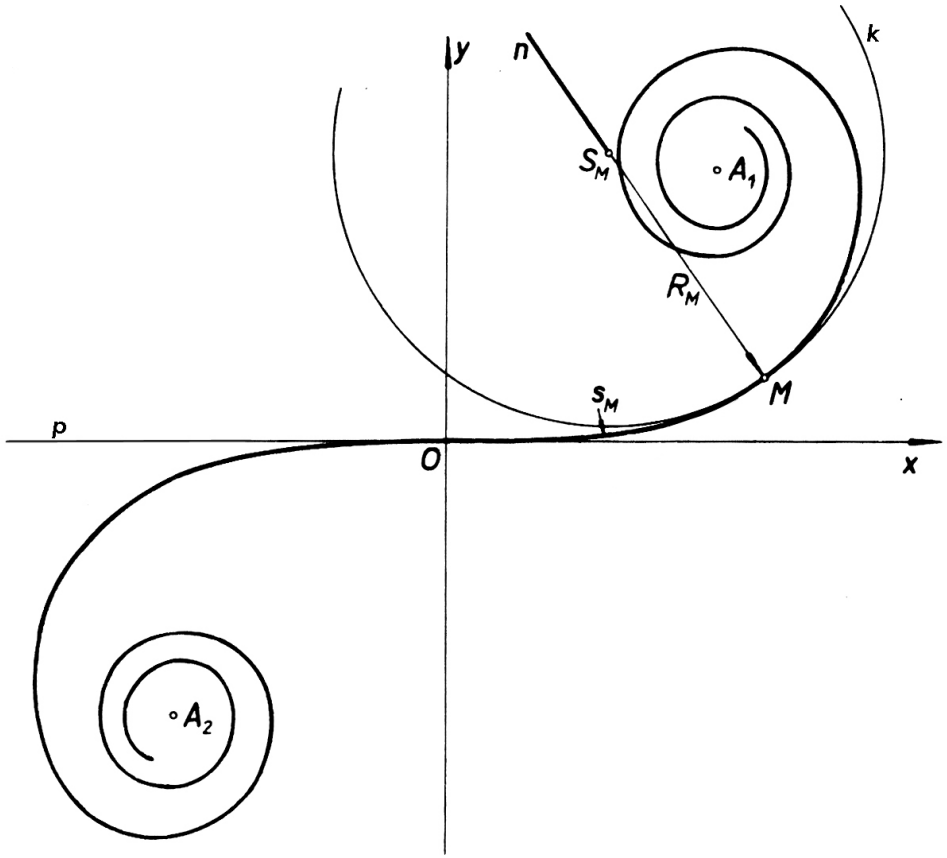
Definice klotoidy je pro naše pochopení obtížnější.

Klotoida je křivka, u které je křivost v daném bodě přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od počátku.



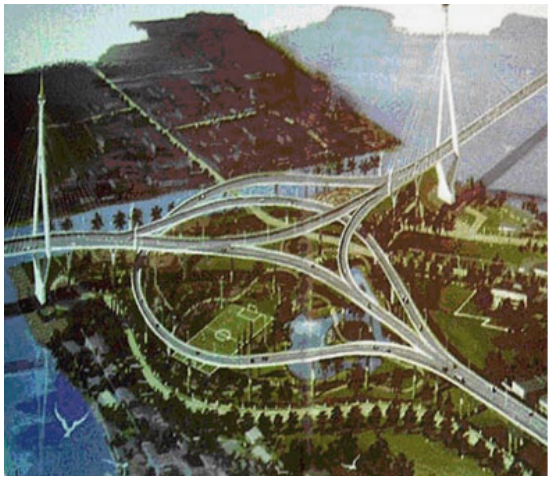
Klotoida - využití

Díky své definici se využívá jako přechodová křivka mezi kružnicí a přímkou



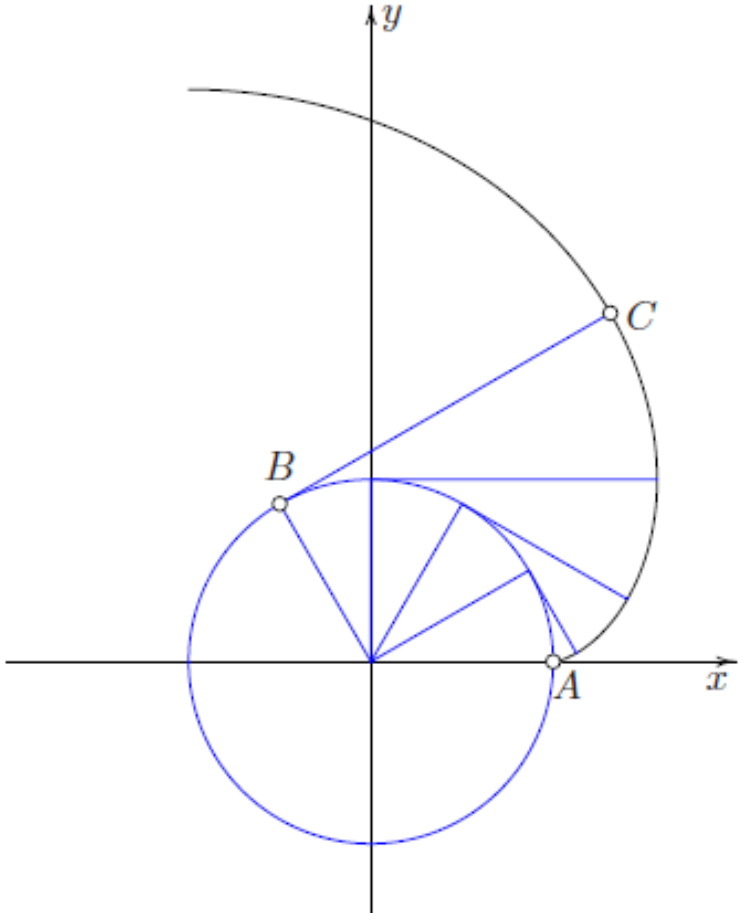
Klotoida - využití

Klotoida - využití

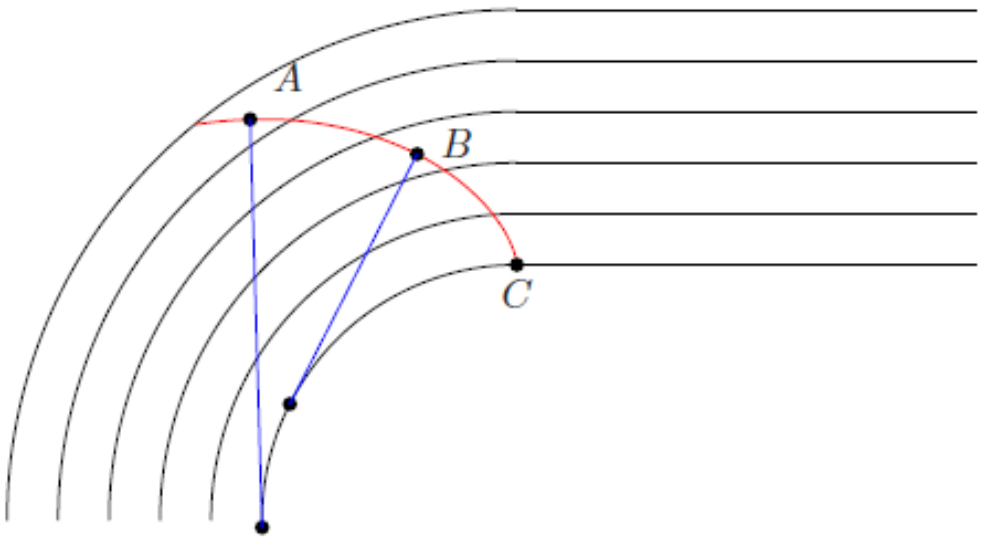


Evolventa útvaru

Představme si, že namotáme nit na nějaký útvar a na konec připevníme tužku. Potom postupně odmotávejme a kresleme. Dostáváme křivku, které říkáme evolventa daného útvaru.

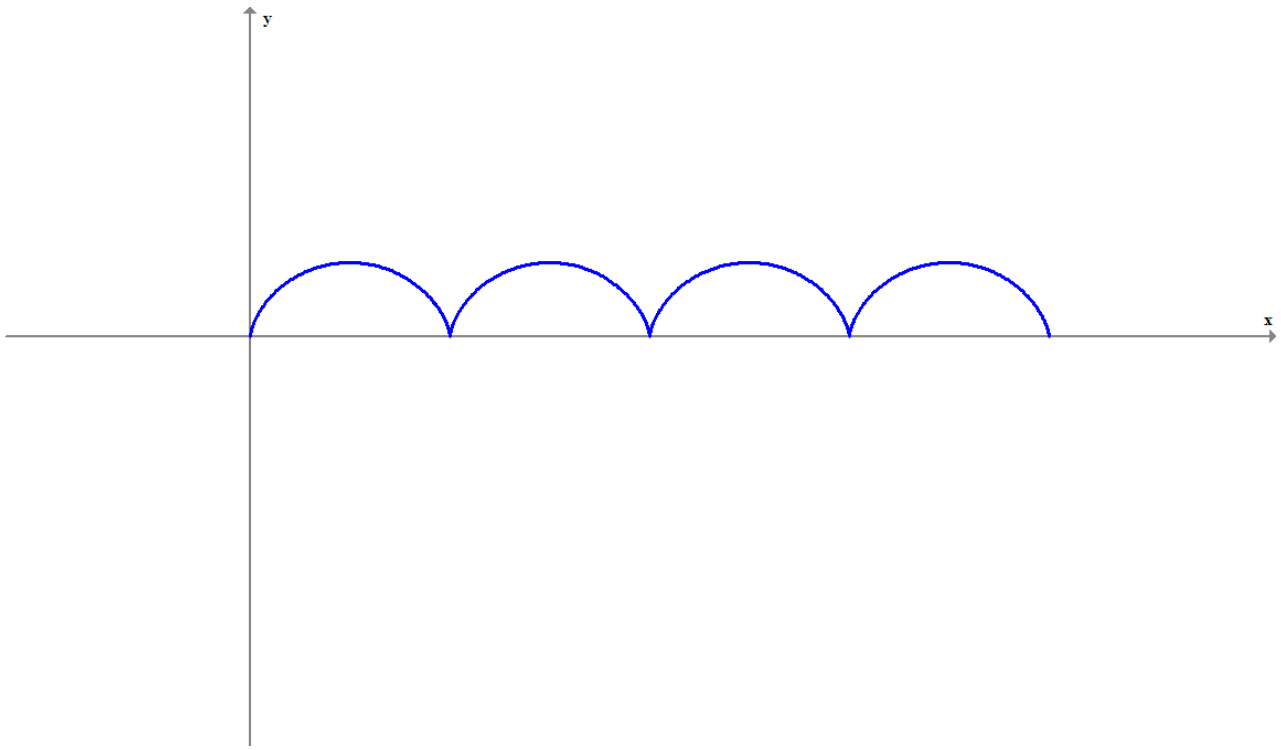


Evolventa kružnice



Cykloidy

Pohybuje-li se bod po kružnici, která se kotálí po přímce, dostáváme křivku, které říkáme cykloida.

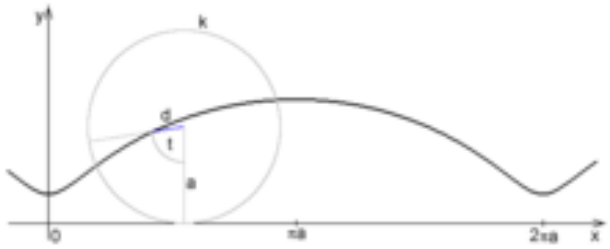


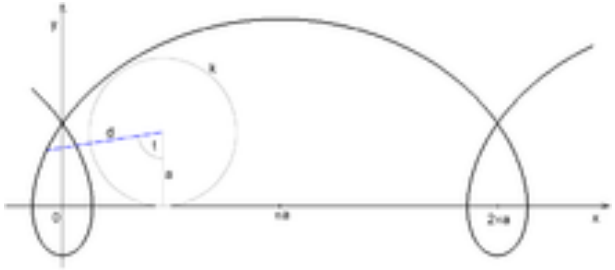
Cykloidy

Cykloidu opisuje například bod na pneumatice.

Pokud se bude kruh kotálet po přímce, bude bod uvnitř kruhu opisovat křivku, které říkáme zkrácená cykloida.

Podobně, bod vně kruhu bude vytvářet křivku, které říkáme prodloužená cykloida.





Šikmým průmětem šroubovice je právě cykloida.

Epicykloida

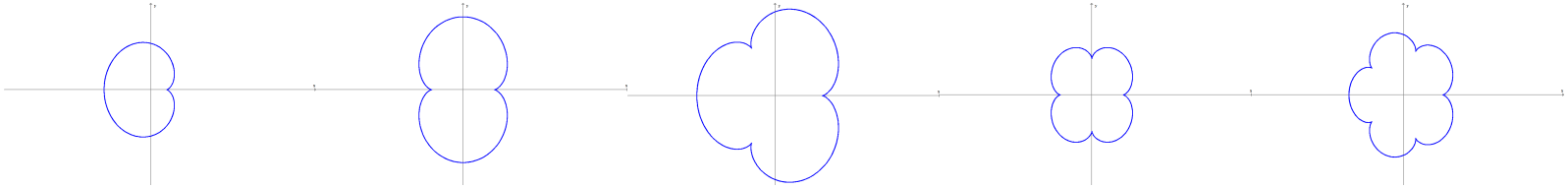
Pokud se pohybuje bod po kružnici, která se kotálí vně po pevné kružnici, dostáváme křivku, kterou nazýváme epicykloida.

Parametrické vyjádření epicykloidy můžeme psát ve tvaru:

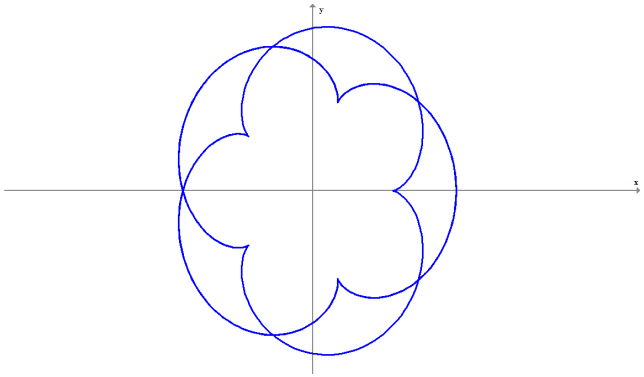
$$x = (R + r)\cos\varphi - r\cos\frac{R + r}{r}\varphi$$

$$y = (R + r)\sin\varphi - r\sin\frac{R + r}{r}\varphi$$

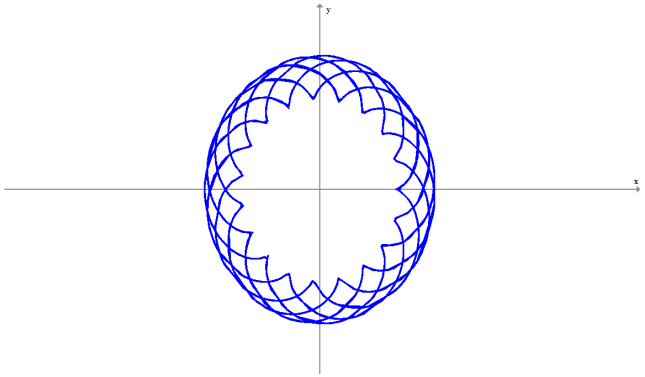
Epicykloida



- $R = 1$, $r = 1$
- $R = 2$, $r = 1$
- $R = 3$, $r = 1$
- $R = 4$, $r = 1$
- $R = 5$, $r = 1$



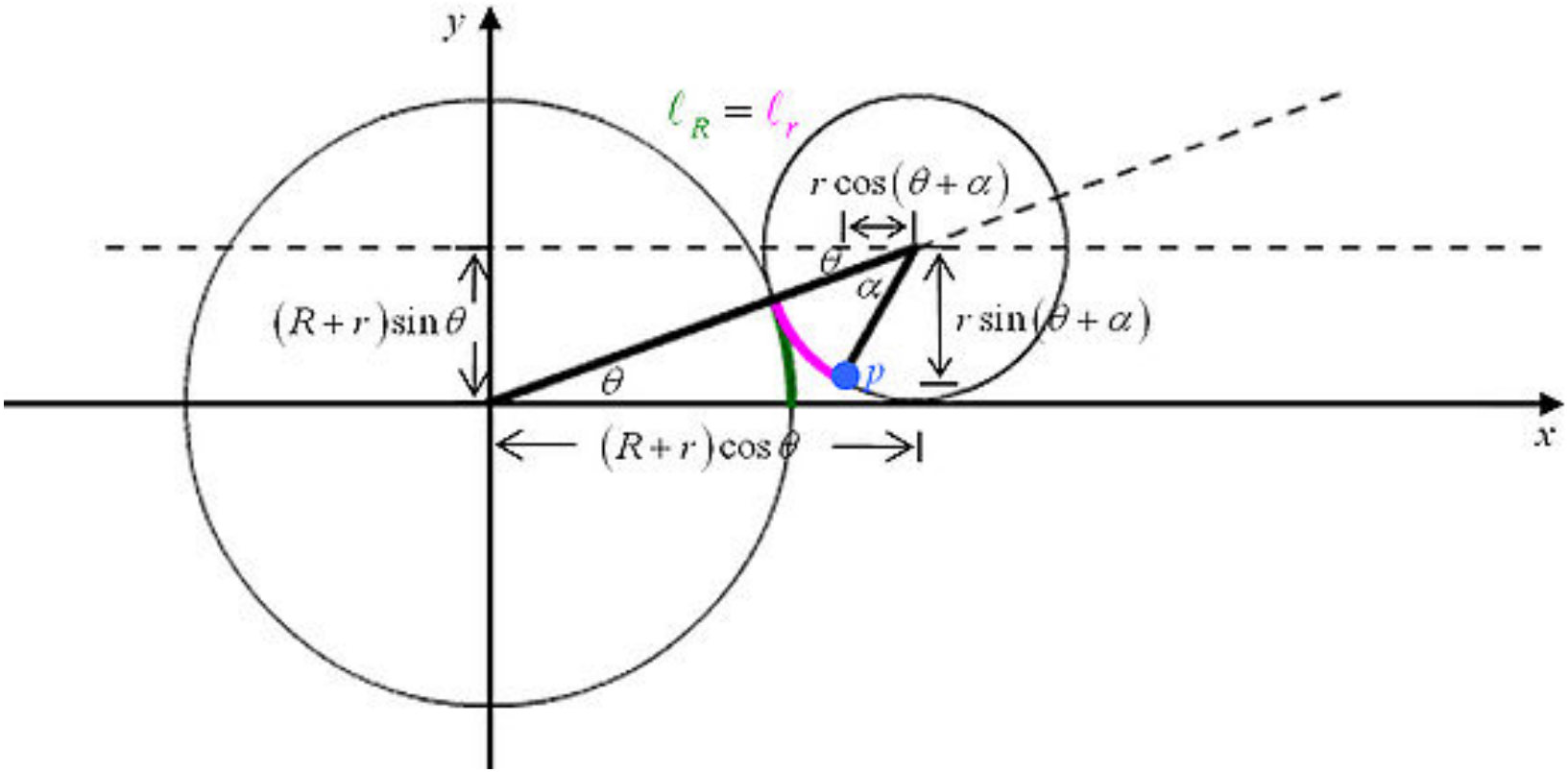
$R = 5$
$r = 2$



$R = 19$
$r = 5$

Pro $R = r$ dostáváme křivku, které říkáme kardioida.

Epicykloida - odvození parametrického vyjádření



1. $l_R = l_r$ a tedy $\alpha = \frac{R}{r}\varphi$
2. $x = (R+r)\cos\varphi - r\cos(\varphi+\alpha)$

Hypocykloida

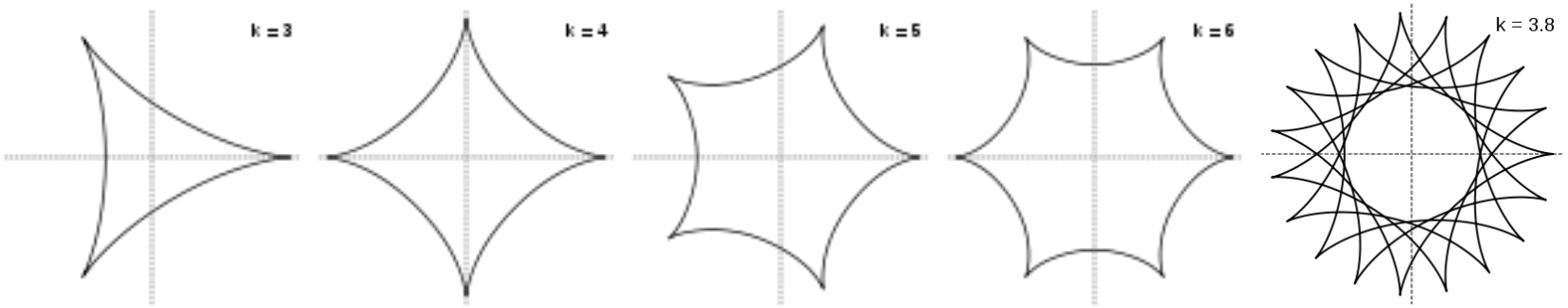
Pokud se pohybuje bod po kružnici, která se kotálí uvnitř po pevné kružnici, dostáváme křivku, kterou nazýváme hypocykloida.

Parametrické vyjádření hypocykloidy můžeme psát ve tvaru:

$$x = (R - r)\cos\varphi + r\cos\frac{R - r}{r}\varphi$$

$$y = (R - r)\sin\varphi - r\sin\frac{R - r}{r}\varphi$$

Hypocykloida

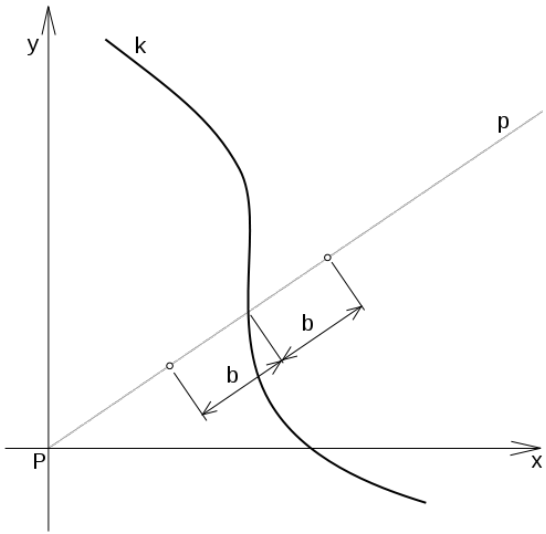


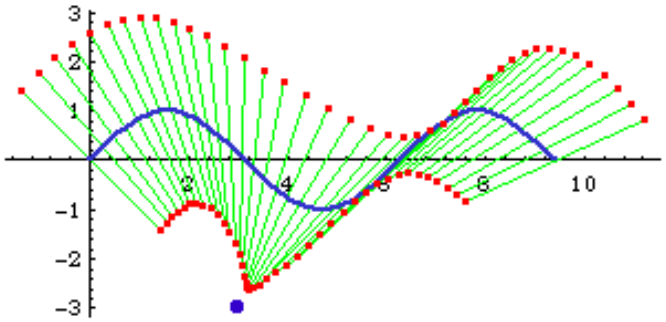
- $R = 3$, $r = 1$
- $R = 4$, $r = 1$
- $R = 5$, $r = 1$
- $R = 6$, $r = 1$
- $R = 19$, $r = 5$

Pro $R = 4 \cdot r$ dostáváme křivku, které říkáme asteroida.

Konchoidy

Nechť je dána křivka $\mathcal{C}$, bod P neležící na $\mathcal{C}$ a reálné číslo $b > 0$. Nyní uvážíme svazek přímek procházející bodem P a na každé přímce najdeme body, které jsou od jejího průsečíku s křivkou $\mathcal{C}$ vzdálené o b. Tyto body nám vytvoří křivku, které říkáme konchoida křivky $\mathcal{C}$.

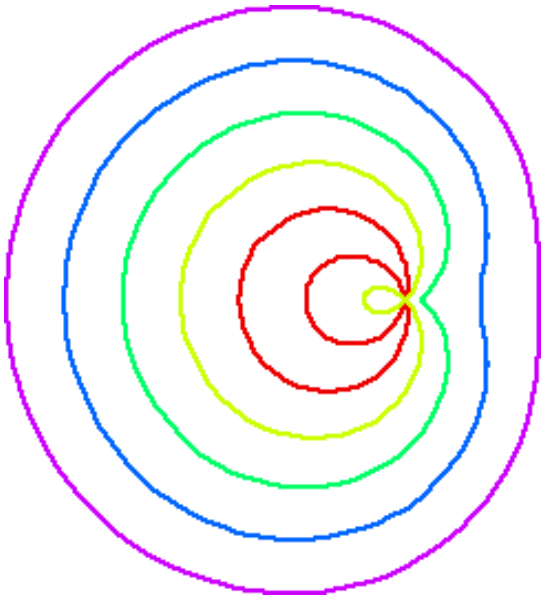


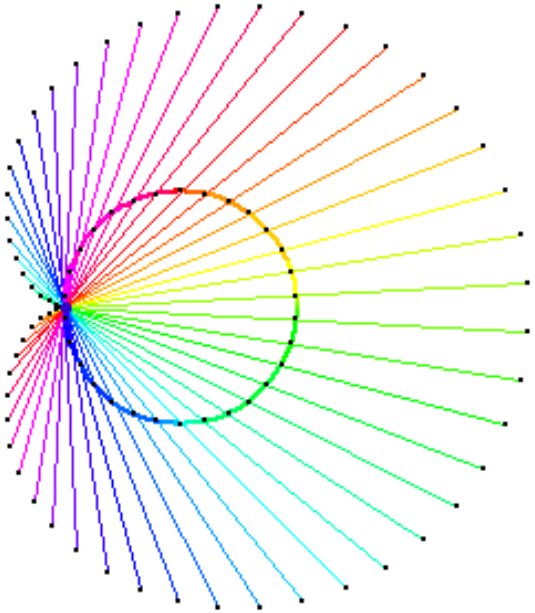


Vezmeme-li za křivku $\mathcal{C}$ Archimédovu spirálu a za bod P střed spirály, potom je její konchoidou opět Archimédova spirála.

Konchoidy kružnice

Zvolíme-li za křivku $\mathcal{C}$ kružnici, dostaneme konchoidy kružnice, kterým se říká Pascalovy závitnice.

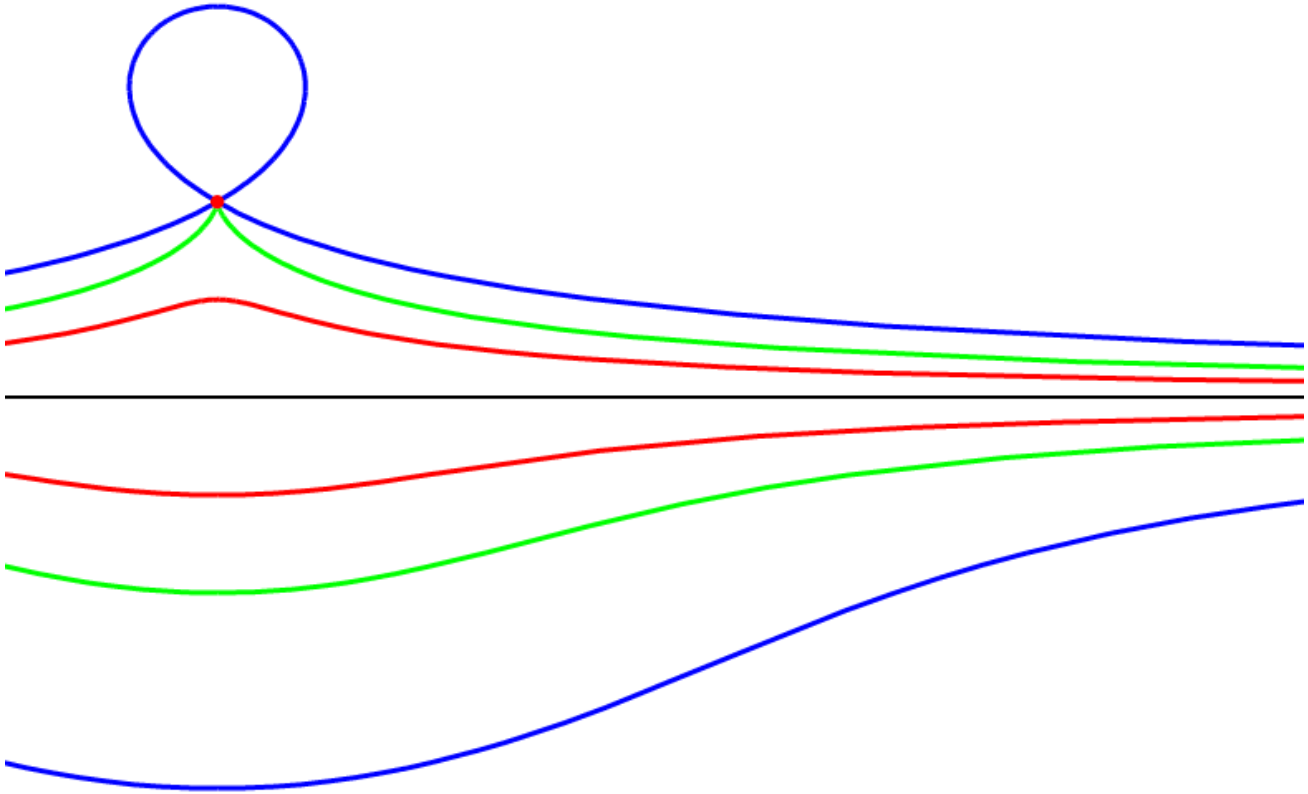




Speciálním případem Pascalovy závitnice je kardioida.

Konchoidy přímky

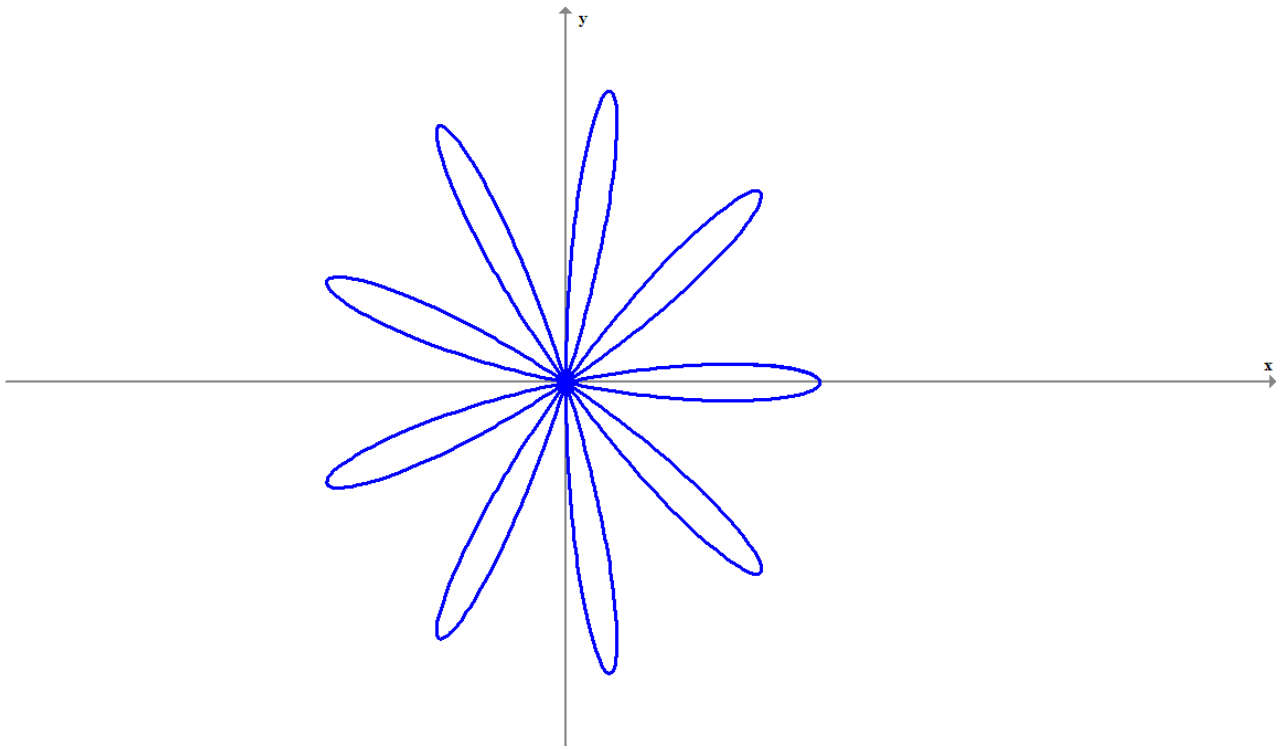
Zvolíme-li za křivku $\mathcal{C}$ přímku, dostaneme konchoidy přímky, kterým se říká Nikodémovy konchoidy.



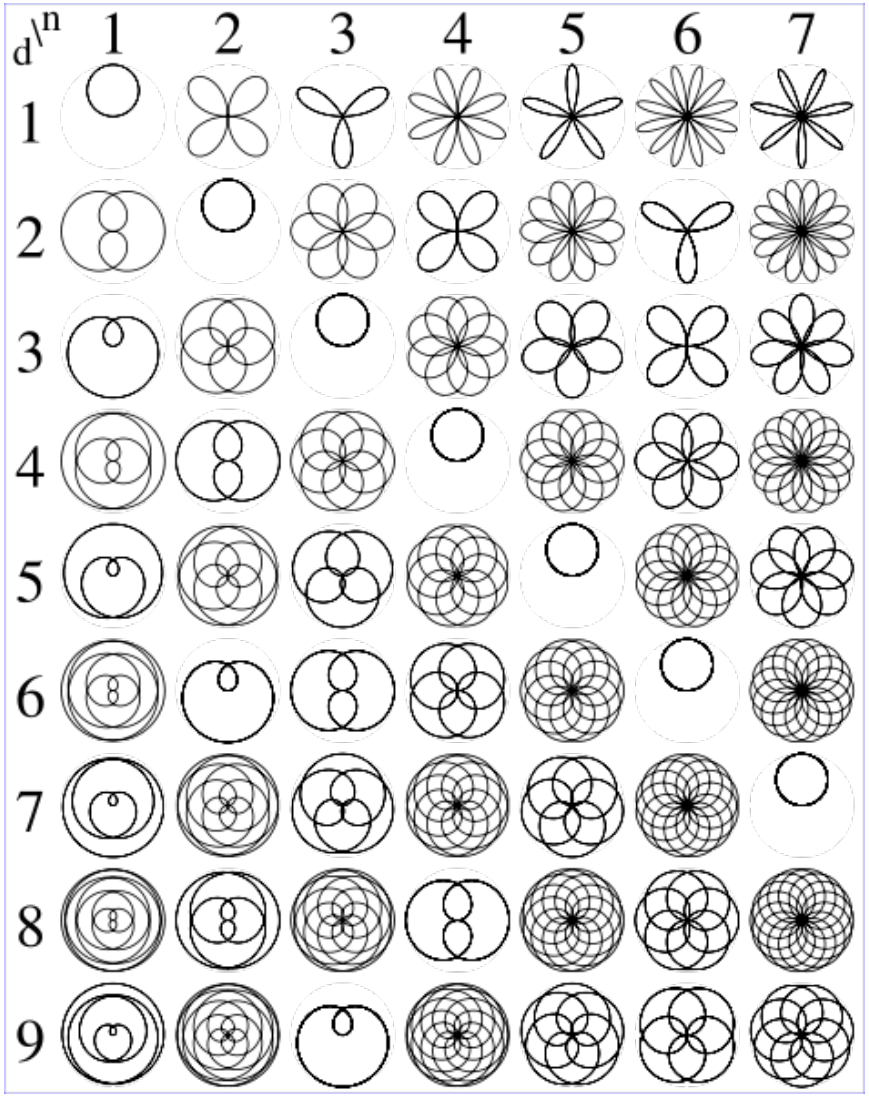
Rhodonea

Zajímavou skupinou křivek jsou rhodonea. Jedná se o křivky, které mají v polárních souřadnicích rovnici

$$\rho = \cos k\varphi.$$

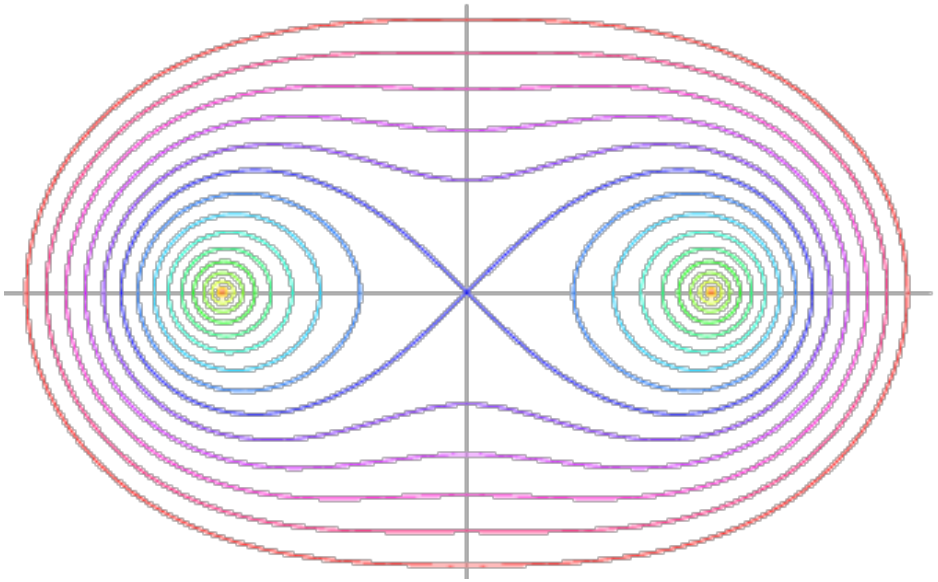


Rhodonea



Cassiniho ovály

Nechť jsou dány dva body E, F. Potom množina bodů, které mají od bodů E, F konstantní součin vzdáleností se nazývá Cassiniho ovál.

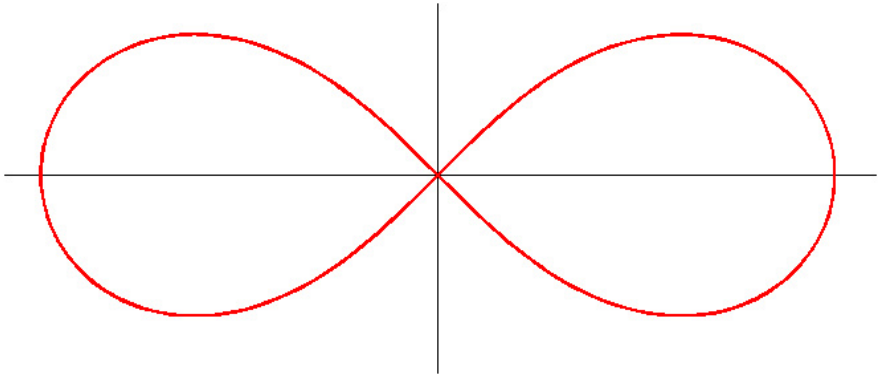


Cassini věřil, že Slunce obíhá kolem Země po Cassiniho oválu, přičemž Země je jedním z ohnisek.

Bernoulliho lemniskáta

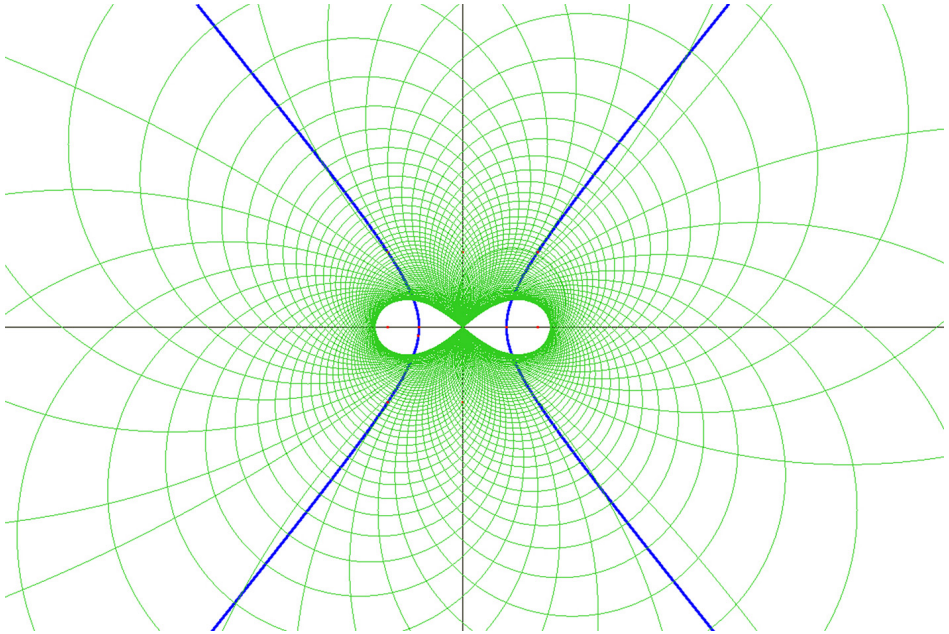
Nechť jsou dány dva body E, F. Potom Bernouliiho lemniskáta je množina bodů X, pro které platí

$$|EX| \cdot |XF| = \left(\frac{|EF|}{2}\right)^2.$$



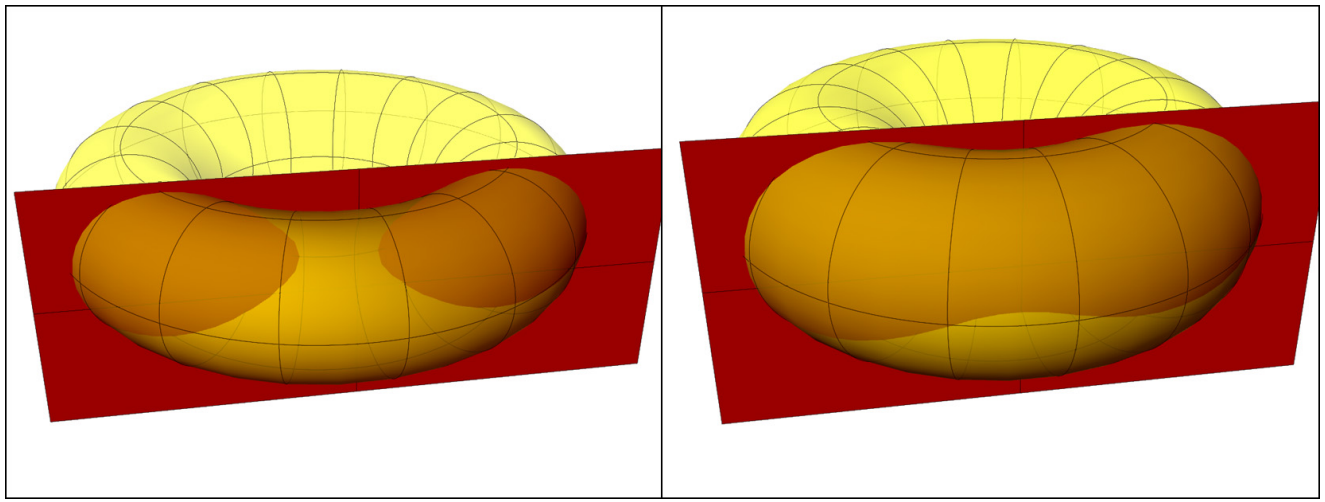
Bernoulliho lemniskáta

Bernoulliho lemniskáta je také obalovou křivkou. Dostaneme ji jako obálku všech kružnic procházejících středem souřadného systému majících střed na dané hyperbole.



Cassiniho ovál

Cassiniho ovály dostaneme jako možné řezy anuloidem (torem).



Další křivky

1. Řetězovka
2. Kisoidy