

Postřehy a materiály k výuce celku „Funkce“

1) Grafy funkcí

- Je předloženo množství výukových materiálů v programu Graph - tvary grafů základních i posunutých funkcí, jejich vzájemné polohy, ...
- Precizní zápis posunutí soustavy souřadnic - např.

$$f : y = \frac{2x+3}{x+1} = \frac{2(x+1)+1}{x+1} = 2 + \frac{1}{x+1}, \text{ tedy } y-2 = \frac{1}{x+1}.$$

Označíme-li $x' = x+1$ a $y' = y-2$, pak má uvažovaná funkce f v posunutých „čárkovaných“ souřadnicích předpis

$$f : y' = \frac{1}{x'}.$$

Uvedená transformace představuje posunutí souřadnicových os. Posunutý počátek P' má souřadnice $P' = [-1; 2]$. Je tedy evidentní, že grafem funkce f je stejná křivka, která je grafem funkce $g : y = 1/x$ (tedy rovnoosá hyperbola). Je proto pouze potřeba známou křivku umístit do posunuté polohy, která je určena pomocnými souřadnicovými osami x' a y' , jejímž průsečíkem je bod P' .

- Grafické řešení rovnic a nerovnic - často opomíjená metoda, která je vhodná zejména v situaci, kdy algebraické úpravy studované (ne)rovnice nevedou k jejímu zjednodušení. Pro průkaznost řešení je vhodné úlohy zadávat tak, aby v příslušném intervalu jedna z uvažovaných funkcí byla rostoucí a druhá klesající. Je-li totiž funkce f na intervalu I rostoucí a funkce g je na tomto intervalu klesající, pak mají jejich grafy na intervalu I nejvýše jeden průsečík. Úlohy navíc lze volit tak, aby studenti byli nuceni uvažovat na grafu funkce několik bodů, kterými prochází.

Úlohy. V \mathbb{R} řešte

$$\frac{1}{(x+3)^4} \leq \frac{1}{2}(x+4)^3 - 3, \quad 2\sqrt{3-x} - 5 = \frac{-8}{x+2} - 1, \quad \frac{3}{2}\sqrt[5]{64-32x} - 2 = \frac{2}{|3-x|}.$$

Výsledky a návody. $(-\infty; -3) \cup (-3; -2)$, $\{-6; 2\}$, $\{1\}$ - viz příložené soubory s grafy v programu Graph.

2) Inverzní funkce

- Jak vypadá inverzní funkce k funkci $f : y = k/x$ ($k \in \mathbb{R} - \{0\}$)? Inverzní funkce f^{-1} má stejný předpis:

$$f^{-1} : x = \frac{k}{y} \Leftrightarrow y = \frac{k}{x}.$$

Funkce f je tedy inverzní sama k sobě. To znamená, že křivka, která je grafem funkce f (tzv. rovnoosá hyperbola) je souměrná podle osy o rovnici $y = x$ (a dále zřejmě i podle osy o rovnici $y = -x$). To je vhodné ukázat vzhledem k pozdějšímu studiu kuželoseček, kdy uvažujeme hyperboly o rovnicích tvaru

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

a hovoříme o jejích poloosách délek a a b .

- Na základě vlastnosti, že grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrné podle osy o rovnici $y = x$ lze vyšetřit průběhy funkcí, které obvykle přímo nestudujeme. Máme-li například načrtnout graf funkce

$$f : y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}},$$

stačí uvážit funkci k ní inverzní

$$f^{-1} : x = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}, \text{ tedy } y = \frac{1}{x^3},$$

jejíž graf by středoškolští studenti měli znát.

- Rozšíření definice liché odmocniny - v \mathbb{R} jí lze uvažovat i ze záporných čísel. Například funkce $f : y = x^3$ má definiční obor i obor hodnot \mathbb{R} a je v celém svém definičním oboru rostoucí. Proto k ní existuje funkce inverzní s předpisem

$$f^{-1} : x = y^3, \text{ tedy } y = \sqrt[3]{x},$$

která má opět definiční obor i obor hodnot \mathbb{R} a je také v celém svém definičním oboru rostoucí. V \mathbb{R} např. platí $\sqrt[3]{-8} = -2$, neboť $(-2)^3 = -8$. Toto pojetí není jednotné. Argumentem pro nerozšíření definice liché odmocniny i pro záporná čísla bývá to, že pak by ne každý vzorec pro počítání s odmocninami platil pro jakékoliv x , např. vztahy $(\sqrt[6]{x})^2 = \sqrt[3]{x}$ nebo $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x}$ platí pouze pro $x \geq 0$. Zdůrazněme, že v prvním vztahu je důvodem to, že výraz $(\sqrt[6]{x})^2$ je definován pouze pro nezáporná x , zatímco ve druhém vztahu je sice výraz $\sqrt[6]{x^2}$ definovaný i pro záporná x , je však pro ně kladný, ale výraz $\sqrt[3]{x}$ nabývá pro záporná x záporných hodnot, tudíž by rovnost byla porušena.

Uvědomme si, že diskusi podmínek se však zcela nevyhneme ani v případě, že jakoukoliv odmocninu budeme vždy uvažovat výhradně z nezáporného čísla! Například u rovnosti $\sqrt[6]{x^2} = (\sqrt[6]{x})^2$ nebo $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$ je jistě vhodné studenty upozornit na skutečnost, že jejich levé strany jsou definovány pro všechna reálná čísla, avšak jejich pravé strany pouze pro čísla nezáporná a tudíž pouze pro čísla nezáporná platí. Naopak výraz $\sqrt{-x}$ je definován pouze pro nekladná čísla a právě pro všechna nekladná čísla platí rovnost $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{-x}$. Domnívám se rovněž, že je vhodné se studenty projít vlastnosti funkcí

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = -\sqrt{x}, \quad f_3(x) = \sqrt{-x} \quad \text{a} \quad f_4(x) = -\sqrt{-x}$$

a jejich grafy. (viz též přiložený soubor v programu Graph)

V souvislosti s podmínkami a definičními obory funkcí si uvědomme, že podobný problém nastává i u jiných funkcí - např. logaritmických. Vzorec

$$\log x^2 = 2 \log x \tag{1}$$

platí pouze pro $x > 0$. Jen za této podmínky je definována jeho pravá strana, strana levá je však definována pro každé $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3) Podmínky a řešení rovnic, využití oboru hodnot funkcí

- Uvažujme rovnici $\log x^2 = 4$. Tato rovnice je definována pro všechna $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Správným postupem řešení je rovnici odlogaritmovat a dále dořešit následujícími úpravami

$$\log x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 100. \tag{2}$$

Protože veškeré úpravy byly za uvedené podmínky ekvivalentní, je množina všech kořenů uvažované rovnice dvojprvková, tj. $K = \{\pm 100\}$. Chybný by ovšem byl postup s využitím vzorce (1), který platí pouze pro kladná x ! Záporný kořen uvažované rovnice bychom tak nenašli

$$\log x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 2 \log x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \log x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 100.$$

Byla-li by však rovnice zadána ve tvaru $2 \log x = 4$, pak by byla definována jen pro $x > 0$ a měla by tedy jediný kořen $x = 100$ (viz výše uvedené ekvivalentní úpravy). Poznamenejme ještě, že by při řešení rovnice $2 \log x = 4$ bylo možné (avšak ne výhodné) použít důsledkovou úpravu

$$2 \log x = 4 \quad \Rightarrow \quad \log x^2 = 4,$$

dále pokračovat jako v (2) a provést zkoušku, která by při tomto postupu byla nedílnou součástí řešení (případně místo zkoušky stanovit podmínky), čímž se vyloučí záporný výsledek.

- Vhodné je studentům zadat rovnici, u níž podmínky některý kořen vyloučí. Obzvláště poučné to může být v situaci, je-li vyloučeno řešení kladné. Toto lze například demonstrovat řešením rovnice

$$\log_3(x+5) + \log_3(2-x) - \log_3(-1-x) = \log_3 2.$$

Argument každého logaritmu musí být kladný. Takto zjistíme, že uvedená rovnice má smysl pro všechna $x \in (-5; -1)$. S využitím vlastností logaritmů, pak za této podmínky platí

$$\log_3(x+5) + \log_3(2-x) - \log_3(-1-x) = \log_3 2 \Leftrightarrow \log_3 \frac{(x+5)(2-x)}{-1-x} \log_3 2.$$

Po odlogaritmování a roznásobení pak dostaneme rovnici, kterou snadno upravíme do součinnového tvaru

$$-x^2 - 3x + 10 = -2 - 2x \Leftrightarrow 0 = x^2 + x - 12 \Leftrightarrow (x+4)(x-3) = 0.$$

Vzhledem k uvedeným podmínkám, za nichž byly veškeré popsané úpravy ekvivalentní, je množina všech kořenů řešené rovnice pouze jednoprvková, $K = \{-4\}$.

- Rovnici

$$5^{\frac{x}{2}} + 2^x + 3^{-x} = 0$$

nelze zjednodušit obvyklými úpravami používanými při řešení exponenciálních rovnic. Pokud si však všimneme, že její levá strana je tvořena součtem tří kladných sčítanců, snadno zdůvodníme, že tato rovnice nemá řešení.

- Pozorným pohledem na rovnici

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x^2-2x} + \sqrt{x^2-4} = 0$$

si můžeme výrazně usnadnit práci s jejím řešením. Protože její levá strana je tvořena součtem tří nezáporných sčítanců, musí být každý z nich nulový. První sčítanec je nulový právě tehdy, když $x = 2$ a pro tuto hodnotu jsou nulové i zbývající dva sčítance, takže má řešená rovnice jediný kořen $x = 2$. Dodejme, že tato rovnice je řešitelná i obvyklým způsobem. Je jí však třeba upravit, poté umocnit, abychom po dalších úpravách a vytknutí dostali součinnový tvar

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x^2-2x} = -\sqrt{x^2-4} \Rightarrow \dots \Rightarrow (2-x)(2+2\sqrt{-x}) = 0.$$

Zbývá zdůvodnit, že druhá závorka nemůže být rovna nule a provést zkoušku, neboť umocnění rovnice je úprava důsledková. Tento postup je tedy výrazně pracnější.

- Uvědomíme-li si, že oborem hodnot funkcí sinus a kosinus je interval $\langle -1; 1 \rangle$, můžeme opět elegantně vyřešit rovnici

$$\sin 2x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

Z uvedeného vyplývá, že pro splnění rovnosti je nutné a stačí, aby každý sčítanec na levé straně rovnice byl roven jedné

$$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

a

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = k \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Tedy pro množinu všech kořenů dostáváme $K = \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Naznačme ještě způsob řešení uvažované rovnice pomocí „obvyklých“ úprav, který však rozhodně není výhodnější. Využitím součtových vzorců nejprve získáme stejný argument x

$$\sin 2x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = 2 - \sin 2x.$$

Po vynásobení dvěma a umocnění rovnice po důsledkové úpravě dostaneme

$$2(\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) = 4(4 - 4 \sin 2x + \sin^2 2x).$$

S využitím známých vzorců přepíšeme levou stranu do tvaru

$$2(\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) = 2(1 + \sin 2x).$$

Po provedení substituce $y = \sin 2x$ dostáváme v pomocné proměnné y kvadratickou rovnici, takže již úlohu algoritmickým způsobem dořešíme.

4) Vlastnosti logaritmů

- Běžně ukazujeme, že vhodné odmocniny jsou čísla iracionálními. Podobně lze ukázat, že ani „většinu“ logaritmů nelze zapsat ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem. Dokažme např., že

$$\log 3 \notin \mathbb{Q}.$$

Vzhledem k tomu, že $\log 3 > 0$, můžeme sporem předpokládat, že $\log 3 = p/q$, kde $p, q \in \mathbb{N}$. Pak platí

$$10^{\frac{p}{q}} = 3 \quad \Rightarrow \quad 10^p = 3^q \quad \Leftrightarrow \quad 2^p \cdot 5^p = 3^q,$$

což je spor s větou o existenci a jednoznačnosti rozkladu přirozeného čísla na součin prvočísel.

- Pomocí logaritmů se dá jednoduše ukázat, že množina iracionálních čísel není uzavřená vůči operaci součtu. Jednoduše řečeno, že součtem dvou iracionálních čísel nemusí být číslo iracionální. Např. $\log 2 + \log 5 = 1$. Podobně to platí i pro operaci součinu, kde tuto skutečnost snáze ukážeme s využitím odmocnin, např. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$.

5) Určení oboru hodnot funkce

I u funkcí, jejichž obor hodnot není vidět bezprostředně z jejich předpisu, jej lze zjistit bez komplexního studia průběhu funkce. Jedná se o jednoduchou aplikaci problematiky rovnic s parametrem. Na předpis uvažované funkce stačí nahlížet jako na rovnici o proměnné x s parametrem y a potřebujeme zjistit, pro jaké hodnoty parametru má tato rovnice alespoň jedno (reálné) řešení.

Úlohy. Určete obory hodnot následujících funkcí

$$f_1 : y = \frac{x^2}{x-4}, \quad f_2 : y = \frac{(x-3)^2}{x^2+1}, \quad f_3 : y = \frac{2x^2-6}{x^2+2}.$$

Výsledky a návody. Předpis funkce f_1 upravíme do tvaru $x^2 - yx + 4y = 0$. Jedná se o kvadratickou rovnici (bez ohledu na hodnoty parametru y), která má alespoň jedno řešení právě tehdy, když je její diskriminant nezáporný, tj. $y^2 - 16y = y(y-16) \geq 0$. Odtud vidíme, že obor hodnot funkce f_1 je $H(f_1) = (-\infty; 0) \cup (16; \infty)$. Podobně zjistíme, že $H(f_2) = \langle 0; 10 \rangle$ (příslušná rovnice je tvaru $(y-1)x^2 + 6x + y - 9 = 0$ a je třeba se u ní zvláště věnovat hodnotě $y = 1$, pro kterou je rovnice lineární) a $H(f_3) = \langle -3; 2 \rangle$ (u této funkce se nabízí také možnost úpravy jejího předpisu do tvaru $y = 2 - 10/(x^2+2)$, ze kterého je tvar oboru hodnot možné zdůvodnit rovnou). Průběhy jednotlivých funkcí - viz příložený soubor v programu Graph.

6) Goniometrické a cyklometrické funkce

- Jsou předloženy výukové materiály k této problematice - grafy základních i posunutých goniometrických případně cyklometrických funkcí v programu Graph, tabulka funkčních hodnot + základní vzorce, soubory v programu Cabri geometrie k odvození či ukázání jednotlivých vlastností goniometrických funkcí a vztahů mezi nimi - využívána je přitom především jednotková kružnice.
- Grafy funkcí sinus a kosinus se nazývají *sinusoida* resp. *kosinusoida* - viz. učebnice Goniometrie pro gymnázia. Jedná se však o tutéž křivku, která je pouze posunutá do jiného počátku, protože platí

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

Podobná situace pak nastává u funkcí tangens a kotangens, jejichž grafy tvoří rovněž totožné křivky. Platí totiž

$$\cotg x = -\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{2} \right).$$

- Goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens jsou periodické, zejména tedy nejsou prosté. Přesto k nim však uvažujeme funkce inverzní. Abychom je mohli definovat, musíme zúžit jejich definiční obory. Myšlenky tohoto postupu i základní vlastnosti příslušných cyklometrických funkcí je možné studentům ukázat též s využitím příloženého souboru v programu Graph.

7) Úlohy

Zadání

- Udejte příklad funkcí následujících vlastností. Případně zdůvodněte, proč požadovaným podmínkám nelze vyhovět.
 - Funkce f_1 , která je prostá, ale není ani rostoucí ani klesající.
 - Sudé funkce f_2 , která má právě jedno ostré globální minimum a právě jedno ostré globální maximum.
 - Funkce f_3 , která má nejmenší periodu 4π a obor hodnot $\langle -2; 4 \rangle$.
 - Funkce f_4 , která má obor hodnot $H(f_4) = (0; 1)$.
 - Funkce f_5 , která je současně sudá i lichá.
 - Funkce f_6 , která má své globální minimum v bodě $[3; -1]$.
 - Funkce f_7 , která je rostoucí v \mathbb{R} a má právě jedno lokální maximum.
 - Funkce f_8 , která je sudá a má právě tři body nespojitosti.
 - Funkce f_9 , která má definiční obor $D(f_9) = (-1; 2)$.
 - Nekonstantní funkce f_{10} , která je periodická, ale neexistuje její nejmenší perioda.
- Najděte všechna $a \in \mathbb{R}$ taková, aby pro libovolnou funkci tvaru $f(x) = ax + 1$ a každé $x \in \langle -2; 2 \rangle$ platilo, že $f(x) \in \langle -7; 9 \rangle$.
- Najděte všechna $b \in \mathbb{R}$ taková, aby pro libovolnou funkci tvaru $f(x) = 3x + b$ a každé $x \in \langle -1; 3 \rangle$ platilo, že $f(x) \in \langle -5; 10 \rangle$.

4. Porovnejte čísla

$$\left(-\frac{49}{16}\right)^{160} \quad \text{a} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-320}.$$

5. Určete definiční obory následujících funkcí

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2} \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{2^x}{1 - \sqrt{\log_8(x - 1)^3}}.$$

6. Najděte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které je funkce f definovaná předpisem

$$f(x) = \left(\frac{1 - a^2}{2 + a}\right)^x$$

klesající exponenciální funkcí.

7. Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která nabývá funkce

$$f(x) = \log_{\frac{1}{7}} \frac{5}{x - 3}$$

nezáporných hodnot.

8. Zjednodušte

$$2 \log_2 6 + \log_2 12 - 3 \log_4 9 + \log_3 15 + \log_{\frac{1}{3}} 5.$$

9. S využitím definice (tj. pomocí jednotkové kružnice, nikoliv kalkulačky) vypočtete

$$\sin \frac{41\pi}{6} - \cotg \left(-\frac{17\pi}{4}\right).$$

10. S využitím goniometrických vzorců, tj. aniž určíte x , vypočtete $\sin x$, $\cos \frac{x}{2}$ a $\cotg 2x$, víte-li, že

$$\operatorname{tg} x = -\frac{4}{3} \quad \text{a} \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

11. Bez užití kalkulaček vypočtete

$$\sin 11,25^\circ.$$

12. Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí

$$\frac{\cos x}{1 + \cos x} \cdot \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

13. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC , kde a, b, c značí délky jeho stran, α, β, γ velikosti jeho vnitřních úhlů a S jeho obsah, platí

$$S = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}.$$

14. Určete velikosti všech ostatních stran a úhlů trojúhelníku ABC , v němž při obvyklém značení platí

$$b = 2\sqrt{2} \text{ cm} \quad c = \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right) \text{ cm}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

Návody a výsledky

1. Jednotlivé úlohy mají obvykle buď nekonečně mnoho řešení nebo nemají řešení žádné. Uvedený přehled řešení není tedy kompletní.

(a) $f_1(x) = 1/x$.

(b) Neexistuje. Je-li minimum (resp. maximum) sudé funkce v bodě x_0 , nastává stejný extrém i v bodě $-x_0$. Jedinou hodnotou, pro níž $x_0 = -x_0$ je $x_0 = 0$, takže extrém realizovaný v tomto bodě může být jediný, ostatní extrémy už se musí vyskytovat v sudém počtu.

(c) $f_3(x) = 3 \sin \frac{x}{2} + 1$.

(d) $f_4(x) = \frac{1}{|x|+1}$.

(e) $f_5(x) = 0$.

(f) $f_6(x) = (x-3)^2 - 1$.

(g) Nelze, protože funkce f_7 má být definována na otevřeném intervalu. Neexistuje tedy největší reálné číslo, v němž by funkce f_7 měla nabývat své největší hodnoty.

(h) $f_8(x) = 1/[x^2(x^2-1)]$.

(i) $f_1(x) = \sqrt{2-x} \cdot \log(x+1)$.

(j) Periodou funkce

$$f_{10}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

je libovolné kladné racionální číslo. Protože neexistuje nejmenší kladné racionální číslo, nemá funkce f_{10} nejmenší periodu.

2. Je výhodné uvažovat grafy funkcí a vyznačit si zadáním vymezenou oblast. Graf libovolné funkce tvaru $f(x) = ax + 1$ prochází bodem $[0; 1]$ - viz připravený soubor v programu Graph. Výsledek $a \in \langle -4; 4 \rangle$.

3. Přímka, která je graf libovolné funkce tvaru $f(x) = 3x + b$ je rovnoběžná s přímkou o rovnici $y = 3x$ - viz připravený soubor v programu Graph. Výsledek $b \in \langle -2; 1 \rangle$.

4. Neboť funkce $f : y = x^n$ je pro $x > 0$ rostoucí, platí

$$\left(-\frac{49}{16}\right)^{160} = \left(\frac{7}{4}\right)^{320} > \left(\frac{5}{3}\right)^{320} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-320}.$$

5. $D(f) = (-2; \infty) - \{1\}$, $D(g) = \langle 2; \infty) - \{3\}$ (návod: $0 \leq \log_8(x-1)^3 \neq 1$).

6. $a \in (-1; 1)$ (návod: $0 < \frac{1-a^2}{2+a} < 1$).

7. $x \in \langle 8; \infty)$.

8. Užitím základních vzorců a pravidel pro počítání s logaritmy dostaneme výsledek 5.

9. Platí $\sin \frac{41\pi}{6} - \cotg \left(-\frac{17\pi}{4}\right) = \sin \frac{5\pi}{6} + \cotg \left(\frac{17\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \cotg \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}$.

10. Pro všechna $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ platí $\sin x > 0$, $\cos x < 0$ a $\cos \frac{x}{2} > 0$. Řešením rovnice $\tg x = \frac{\sin x}{-\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{4}{3}$ za uvedených podmínek dostáváme $\sin x = \frac{4}{5}$, proto $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\frac{3}{5}$. Dále platí $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ a $\cotg 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{7}{24}$.

11. Platí $\sin 11,25^\circ = \sin \frac{22,5^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 22,5^\circ}{2}}$. Ale $\cos 22,5^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, takže $\sin 11,25^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

12. Algebraickými úpravami lze levou stranu rovnice upravit do tvaru $\tg \frac{x}{2}$, tzn. rovnice je splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž je definována, tj. $x \neq \pi + 2k\pi$ a $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné.

13. Podle sinové věty platí $a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}$. V libovolném trojúhelníku navíc platí $\sin \gamma = \sin [180^\circ - (\alpha + \beta)] = \sin (\alpha + \beta)$. Uvážíme-li, že $S = \frac{1}{2}ac \sin \beta$, a dosadíme-li $a = \frac{c \sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, dostaneme dokazovaný vztah.

14. Podle kosinové věty vypočteme $a = 2$ cm. Pomocí sinové věty určíme úhel β , o kterém vzhledem k tomu, že nyní již známe délky všech stran trojúhelníku, víme, že je ostrý. Zjistíme, že $\beta = 45^\circ$ a dopočteme $\gamma = 105^\circ$.