Modulární systém dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků JmK
v přírodních vědách a informatice
CZ.1.07/1.3.10/02.0024

Kombinatorika na interaktivní tabuli

Příručka učitele

Marika Kafková

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
UNIVERSITAS MASARYKIANA BRUNENSIS
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PŘÍRUČKA

PRO UČITELE

Marika Kafková

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$n^k$$

KOMBINATORIKA

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\frac{(k+n-1)!}{k!\cdot(n-1)!}$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$$

Smartboard

Brno 2011

Obsah

Předmluva 2

1 Úvod 3

1.1 Slovo autorky 3

1.2 Co interaktivní učebnice poskytuje 5

1.3 Co najdete (nenajdete) v příručce 5

1.4 Jak s i-učebnicí pracovat 5

2 Historie kombinatoriky 10

2.1 Vhodné a zajímavé zdroje z historie matematiky 18

3 Interaktivní učebnice (i-učebnice) **20**

3.1 Kombinatorika bez opakování 20

3.1.1 Šablony první části i-učebnice 21

3.1.2 Závěr první části 76

3.2 Kombinatorika s opakováním 77

3.2.1 Šablony druhé části i-učebnice 78

4 Seznam slovních úloh pro studenty 111

4.1 Kombinatorika bez opakování 111

4.1.1 Výsledky 114

4.2 Kombinatorika s opakováním 115

4.2.1 Výsledky 116

5 Seznam kvízů **117**

6 Závěr 118

Milí učitelé,

právě držíte v rukou metodickou příručku, jež by měla poskytnout přehled o připraveném kurzu z kombinatoriky za pomoci interaktivní tabule. Pro celý kurz byla zhotovena v softwaru SMART Notebook[1] interaktivní učebnice, jejímž cílem je studentům předložit kombinatoriku zábavně, názorně, pestře a ve srozumitelné formě.

Mé upřímné poděkování patří především vedení Gymnázia v Českých Budějovicích (Jírovcova 8) za možnost uskutečnit výuku kombinatoriky s využitím interaktivní tabule na jejich gymnáziu, pani profesorce Mgr. Petrové za výbornou spolupráci, studentům 2. ročníku čtyřletého studia za příjemnou atmosféru ve třídě a zejména panu doc. RNDr. Eduardu Fuchsovi, CSc. za cenné rady a podporu. Bez jejich pomoci by pro vás tyto materiály nejspíš nevznikly.

[1] Software Smart Notebook je součástí u nás nejpoužívanější interaktivní tabule SMART Board.

1 ÚVOD

1.1 Slovo autorky

Během svého doktorského studia na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně jsem měla možnost vyučovat kombinatoriku studenty třetího ročníku učitelské matematiky. Cílem tohoto kurzu bylo nejprve se studenty zopakovat středoškolskou kombinatoriku, na kterou pak navazovala těžší témata a hlavně složitější úlohy. Bohužel jsem ke svému nemilému překvapení zjistila, že si studenti přinášejí ze středních škol nedostatečné základy kombinatoriky, ba mnohdy dokonce základy žádné. Často tak nebylo na čem stavět a bylo nutné se v několika hodinách nejprve zabývat právě středoškolskou kombinatorikou, která byla nutnou podmínkou pro řádné absolvování celého předmětu. Tento fakt mě přiměl k zamyšlení, jakým způsobem se na středních školách tato část matematiky učí, co dělá studentům největší problémy a jak co nejlépe naučit základům kombinatoriky vysokoškolské studenty. Domnívám se, že správná cesta nevede přes jednotlivé kombinatorické pojmy a s nimi spojené vzorce. Cílem tedy bylo nad příklady přemýšlet, využívat zdravý selský rozum a pouze s využitím kombinatorických pravidel součtu a součinu se naučit tyto úlohy řešit. Přestože začátky nebyly snadné, většina studentů kombinatoriku nakonec zvládla, byť je tato část považována za „strašáka matematiky“. Na konci semestru už nebyla kombinatorika hodnocena jakožto nejtěžší a nejméně zábavný předmět. Součástí státních závěrečných zkoušek bývá i úloha z kombinatoriky a mile mě překvapilo, že tuto úlohu studenti často řešili jako první a co nejdůležitější, že správně.

Další impulz, který mě vedl ke zhotovení interaktivní učebnice, byly výsledky dotazníku[2] uskutečněné v roce 2008, v níž maturanti označovali mimo jiné tři středoškolské matematické okruhy, které se jim zdály z hlediska porozumění a pochopení látky nejtěžší. Jak se dalo očekávat, mezi dva nejtěžší zařadili právě okruh *Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*. Domnívám se, že se na negativním postoji k této části středoškolské matematiky podílí velkou měrou především kombinatorika.

Kombinatoriku, byť si to neuvědomujeme, často využíváme i v běžném životě. Každému z nás se určitě už mnohokrát stalo, že musel zvažovat různé možnosti výběru „jistých výrobků z určité skupiny“, sestavoval různé možnosti řešení, které mohou nastat, přičemž vždy byla snaha najít to optimální, nejefektivnější řešení daného problému. Naučit se správně rozhodovat a možná i nevědomky rozvíjet své myšlení, o to se právě snaží již několikrát zmiňovaná kombinatorika.

Na základě těchto zjištění mě napadla myšlenka zkusit kombinatoriku odučit na gymnáziu trochu jinak, nestandardně - nejen pouze s využitím dvou již zmíněných kombinatorických pravidel (pravidla součtu a součinu), ale také s využitím nové technologie, která umožňuje zábavnější a méně stereotypní formu výuky – tzv. *interaktivní tabule*. Otázky, které jsem si kladla, byly následující:

- Bude mít tento výukový proces pozitivní vliv na pochopení látky?

[2] Studentům čtvrtých ročníků několika gymnázií v ČR jsem předložila dotazník, který obsahoval 5 otázek. Dotazník celkem vyplnilo 407 maturantů; ze tříd s všeobecným zaměřením (325 studentů), z jedné matematické třídy (28 studentů) a ze dvou jazykových tříd (54 studentů). Tato skladba studentů byla vybrána záměrně, neboť cílem bylo vytvořit reprezentativní vzorek, který by se co nejvíce přiblížil skladbě maturantů ze všech gymnázií. Připravený dotazník mi měl potvrdit moji hypotézu o oblíbenosti, resp. neoblíbenosti matematiky a podat informace o matematických okruzích, které se zdají studentům nejtěžší, nejlehčí, zábavné a zda-li se používají v hodinách matematicky speciální pomůcky.

.

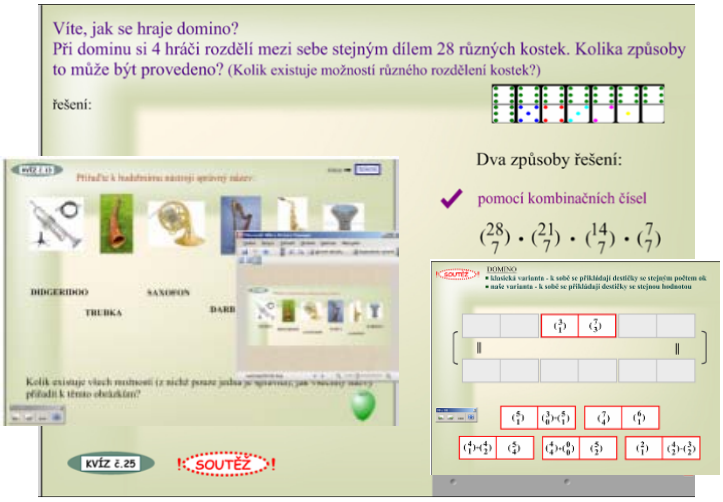
- Zpestří se studentům hodiny matematiky?
- Uvítají v dnešní technické době ve výuce studenti interaktivní tabuli?

Podle mého názoru interaktivní tabule představuje další možnost, jak žákům výuku zpestřit a do jisté míry i ulehčit. Interaktivní tabuli lze uplatnit při výuce téměř všech vyučovaných předmětů a to nejenom při výkladu, ale i při opakování a zkoušení probírané látky. Pokusila jsem se proto zařadit interaktivní tabuli SMART Board do výuky kombinatoriky a ke svému milému zjištění se potvrdilo, že tato forma výuky měla skutečně ve většině případů pozitivní ohlas.

Příručka, již držíte v ruce, by vám měla sloužit k lepší orientaci v připravené interaktivní učebnici. I-učebnice je vytvořena tak, aby studenti se učili řešit jednotlivé typy kombinatorických úloh pouze s využitím dvou základních kombinatorických pravidel[3]. Většina uvedených úloh v i-učebnici je zcela originálních, nově vymyšlených, pouze malá část úloh je vybrána z různých publikací či učebnic. Vzhledem k vysoké četnosti učebnic o kombinatorice na našem trhu se ovšem může stát, že některé úlohy se budou navzájem více či méně podobat. Pro ulehčení výpočtů v průběhu celého výukového procesu se studenti postupně seznámí s kombinačními čísly a s pojmem $n!$. Pojmy *variace, permutace* a *kombinace* se však v připraveném kurzu nevyskytují!

Doufám, že připravený materiál se bude líbit a žákům i vám výuku zpestří. Všem přeji hodně zábavných okamžiků a usměvavých studentů při hodinách kombinatoriky.
Matematice zdar a kombinatorice zvlášť!

Marika Kafková



Obr. 1.1: Ukázka šablony interaktivní učebnice.

[3] Studentům se během výuky neprozradí vzorce k jednotlivým typům kombinatorických příkladů.

1.2 Co interaktivní učebnice poskytuje

Vytvořená interaktivní učebnice je určena k výuce matematiky na gymnáziích a ostatních středních školách, na nichž se kombinatorika vyučuje. Učitelům poskytuje netradičním způsobem zpracovaný materiál k realizaci výuky a dále mnoho podnětů k rozvíjení myšlení žáků. Fakt, že se v i-učebnici nenachází pojmy variace, permutace a kombinace, nutí žáky nenásilnou formou rozvíjet své logické myšlení. Díky velkému prostoru pro výběr způsobu řešení a poté správnému vysvětlení se žáci učí komunikovat, vyjadřovat své myšlenky, vzájemně si naslouchat a spolupracovat ve skupině.

Na druhé straně učebnice žákům nabízí zábavně zpracované matematické téma, mnoho zajímavých příkladů ze života, pro snazší pochopení úloh i řadu animací řešení a pro zpestření látky četné kvízy, jež úzce souvisí se zadáním úloh. Kvízy představují propojení matematiky s ostatními předměty, což je podle mého názoru velmi přínosné.

Interaktivní učebnice není propojena s žádnou jinou učebnicí kombinatoriky na českém trhu, a tudíž ji lze používat samostatně, zcela nezávisle podle potřeb a podmínek třídy.

1.3 Co najdete (nenajdete) v příručce

V připravené interaktivní učebnici se objevují základní poznatky z jedné z hlavních částí *Diskrétní matematiky*, tj. *kombinatoriky*. Druhá kapitola metodické příručky velmi stručně pojednává o historii kombinatoriky. Domnívám se, že výkladem historie matematiky (v našem případě převážně kombinatoriky) se dá výuka studentům zajímavě zpestřit. Vyučující může na pár minut od probírané látky odbočit a studenty zaujmout genezí této vědní disciplíny. Třetí kapitola se už týká výuky kombinatoriky, jejíž součástí je seznam úloh spolu s výsledky a pro lepší pochopení látky jsou některé příklady obohaceny o animace řešení. Popisovaná kapitola je rozdělena na dvě části. První část je věnována kombinatorice bez opakování, druhá kombinatorice s opakováním. Další kapitola by měla posloužit jak vám učitelům, tak i studentům, neboť obsahuje zadání všech úloh, jež se budou v následujících hodinách řešit. V páté kapitole najdeme seznam kvízů, které úzce souvisí se zadáním jednotlivých úloh a kapitola šestá patří závěru.

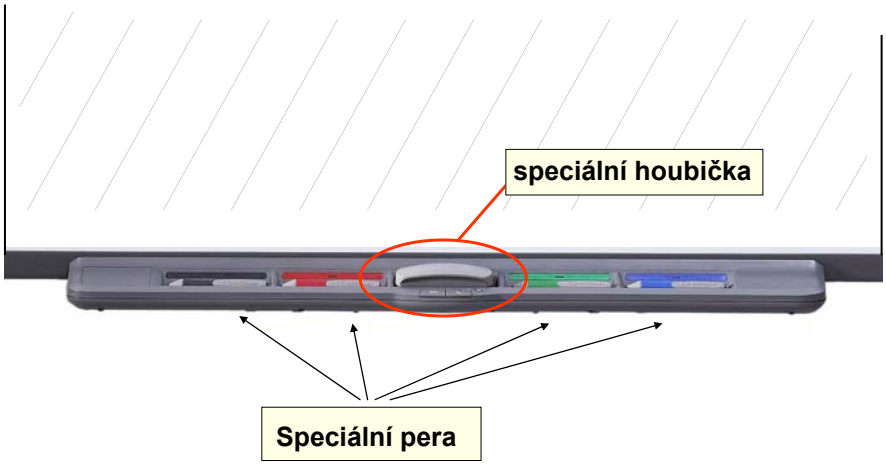
Je nutno upozornit, že byť je nedílnou součástí kombinatoriky i binomická věta, popř. princip inkluze a exkluze či Dirichletův princip, v interaktivní učebnici jim pozornost věnována není. Domnívám se totiž, že v případě binomické věty se nejedná o nejsložitější část této látky a oba jednoduché principy nejsou v kombinatorice stěžejní, tudíž nebyly do i-učebnice zařazeny.

1.4 Jak s i-učebnicí pracovat

Práce s učebnicí není náročná, přesto by však každý uživatel měl dodržovat následující postup.

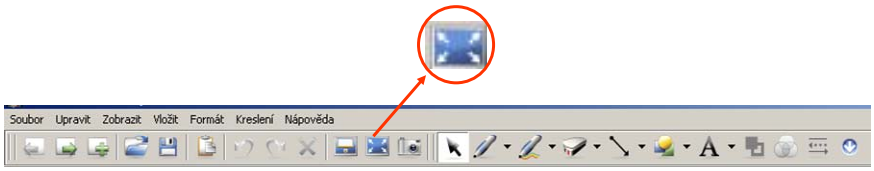
- ⇨ Celá učebnice se ovládá za pomocí prstu či jiného tupého nástroje. Pro text je nejjednodušší využívat buď plovoucí nástroje nebo 4 různobarevné propisovače, nacházející se na poličce těsně pod interaktivní tabulí.

Obr.1.2: Plovoucí nástroje.



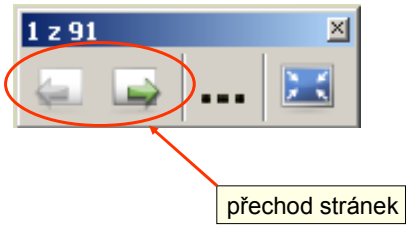
Obr. 1.3: Speciální pera a houbička.

⇨ Při spuštění interaktivní učebnice se zobrazí na pracovní ploše softwaru Smart Notebook úvodní stránka, tzv. motivační. Obsahuje křížovku, jejíž tajenkou je slovo *kombinatorika*. Cílem je studentům naznačit, že přichází zajímavé téma zábavně zpracované.
Po stisknutí ikony, jež se nachází na horní liště, se i-učebnice zobrazí na celou plochu interaktivní tabule.



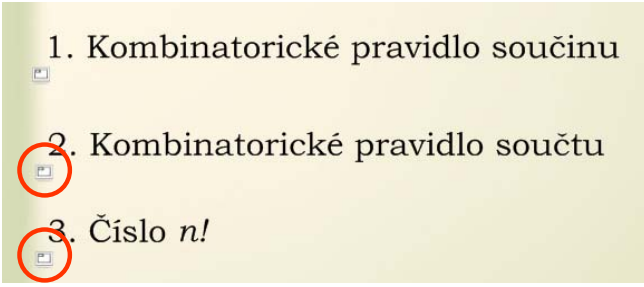
Obr. 1.4: Ikona zobrazující i-učebnici na celou plochu tabule.

- Přejít na další stránku (též šablonu) nám umožní speciální ikona představující přechod z jedné stránky na druhou. Tato ikona se využívá v celé i-učebnici, tzn. že celá učebnice je připravena pro postup stránky po stránce.



Obr. 1.5: Symboly zobrazují přechod stránek.

- Ikonou, symbolizující přepínání stránek, se posléze dostaneme na druhou šablonu – informativní. Důležitá je především pro vyučujícího, neboť obsahuje hlavní menu se základními kombinatorickými pojmy. Kliknutím na obdélníček u každého pojmu (viz obr. 1.6) se uživatel přesune v interaktivní učebnici na požadovanou stránku. Menu rovněž obsahuje seznam kvízů, které se v učebnici objevují.



Obr. 1.6: Symbol pro přesun na požadovanou stránku.

- Počínaje třetí šablonou se studenti začínají pomalu seznamovat se středoškolskou kombinatorikou.

- Mnoho stránek v části *Kombinatorika bez opakování* obsahuje kvízy, o kterých pojednává kapitola pátá. Pro symbol znázorňující daný kvíz byla zvolena následující ikona:

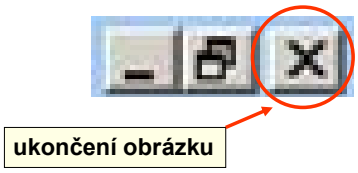
Obr. 1.7: Ikona kvízu.

Na ikonu stačí klepnout a zobrazí se zadání kvízu. Po opětovném kliknutí na stejnou ikonu se vrátíme zpět k řešenému příkladu.

⇨ Některé úlohy jsou obohaceny o animaci řešení, která umožňuje studentům daný příklad, resp. řešení úlohy lépe pochopit, a tak snáz proniknout do celé kombinatoriky. Pro animace jsou zvoleny různé ikony, u kterých je vždy vyznačeno, že se jedná o animaci řešení.

Obr. 1.8: Ikony charakterizující animace řešení.

Přestože ikony pro animace řešení nejsou stejné, není složité je rozpoznat. Stačí na příslušnou ikonu klepnout a otevře se srozumitelně popsané řešení buď ve formě obrázku či ve formě prezentace připravené v PowerPointu. Při prezentaci stačí pro přesun na další akci klepnout na interaktivní tabuli, což nahrazuje levé tlačítko myši u počítače. Obrázek se ukončuje ikonou (křížkem) nacházející se v pravé horní části.



Obr. 1.9: Typický symbol pro ukončení obrázku.

⇨ Několikrát se objevuje ikona znázorňující cvičení formou soutěže. Soutěže jsou založené na stejném principu jako kvízy, tj. klepnutím na ikonu:

Obr. 1.10: Ikona soutěže.

se zobrazí stránka se zadáním. Opětovným poklepání na ikonu se vrátíme zpět k řešenému příkladu.

⇨ Každá stránka (šablona) obsahuje různé obrázky či objekty, které jsou buď vloženy napevno, či se s nimi dá manipulovat. O jaké objekty se jedná a jak s každou stránkou pracovat, je vysvětleno u každé šablony zvlášť – viz kap. 3.1. a 3.2.

⇨ Po každé hodině je možné si soubor uložit. Stačí zvolit správnou ikonu, která je zobrazena na hlavním panelu – viz obr. 1.11.

Obr. 1.11: Ikona pro uložení souboru.

- Celý soubor se ukončuje velmi známým symbolem pro ukončení jakéhokoliv programu:

Obr. 1.12: Ikona pro ukončení programu.

2 HISTORIE KOMBINATORIKY

Často se uvádí, že kombinatorika vznikla v 17. století a to pouze jako podpůrná část teorie pravděpodobnosti. Situace však není tak jednoduchá, jak se zdá. Kapitola *Historie kombinatoriky* obsahuje stručný a srozumitelný přehled historie této vědní disciplíny s různými zajímavostmi, o kterých se může vyučující ve výuce zmínit a tím žákům hodiny kombinatoriky zpestřit.

Stejně tak jako matematika je součástí lidstva od jeho prvopočátku, také kombinatorika má překvapivě hluboké kořeny. Již kolem roku 2000 př. Kr. se objevují první aplikace kombinatoriky, příklady a výsledky. Největší zdroj kombinatorických textů nacházíme v nejrozvinutějších civilizacích té doby, v Indii a Číně. Řada prací se přitom vůbec nedochovala a většinou je složité i určení přibližných dat vzniku těchto textů. Např. historie základních kombinatorických pravidel je mnohem delší než se zpravidla uvádí. Vzhledem k jednoduchosti byla totiž tato pravidla používána neuvědoměle, a tudíž bez potřeby se jimi teoreticky zabývat. O používání těchto pravidel svědčí mnoho příkladů. Za zmínku stojí např. Leonardo Pisano[4], známý pod jménem Fibonacci, který píše ve svém díle *Liber Abaci*[5] z roku 1202 ve 12. kapitole:

Sedm starých mužů jde do Říma;
každý vede sedm mezků;
každý mezek nese sedm pytlů;
v každém pytli je sedm bochníků;
pro každý bochník je sedm nožů;
každý nůž má sedm pouzder.
Jaký je celkový počet všech uvedených věcí? [6]

Fibonacciho úloha je však variantou příkladu, který je uveden již v egyptském Rhindově papyru[7] ze 17. stol. př. Kr.

---

[4] Neboli Leonardo Pisánský je považován za nejvýznamnějšího matematika středověké Evropy.

[5] Liber Abaci – tzv. *Kniha o abaku* však nepopisuje počítání na abaku, ale uvádí celou řadu početních metod aritmetiky, algebry, teorie čísel a mnoho demonstrujících příkladů. Obsahuje 15 kapitol, 459 stran.

[6] Přeloženo z anglického pramene:
SIGLER, L., E.: *Fobonacci's Liber Abaci: Leonardo Pisano's Book of Calculation*. Springer-Verlag, New York, 2002.
Anglický text:
[Seven Old Men Go to Rome]
„ Seven old men go to Rome;
Each of them has 7 mules;
And on each mule there are 7 sacks;
And in each sack there are 7 loaves of bread;
And for each 49 loaf of bread there are 7 knives;
And each knife has seven scabbards.
The sum of all the aforesaid is sought. First indeed you multiply the numer of old men, namely 7, by the numer of mules, namely 7; there will be 49 mules; this you multiply by the numer of bags, namely 7; there will be 343 bags; this you multiply by the numer of loaves of brad in one bag, namely 7; there will be 2401 loaves of brad; this you multiply by the numer of knives per piaf, namely 7; there will be 16807 knives; this you multiply by the numer of scabbards for one knife, namely 7; there will be 117649 scabbards; this added to the 16807 knives, the 2401 loaves, the 343 sacks, the 49 mules, and the 7 old men make 137256 for the sum, as is shown in the illustration.„

Máme sedm domů, v každém domě je sedm koček.
Každá kočka zabije sedm myší,
každá myš by sežrala sedm klasů pšenice,
z každého klasu by se vypěstovalo sedm měřic[8] *zrna.*
Jaký je celkový počet těchto vyjmenovaných věcí?

Podíváme-li se ještě více do historie, obsahuje příklady s použitím kombinatorických pravidel i slavná čínská *Kniha proměn* (2200 př. Kr.). Základem čínského systému byly znaky Jang (-) a Jin (--), které se kombinovaly do trigramů (skupiny po třech) a hexagramů (skupina po šesti). Staré čínské myslitele zajímalo, kolik trigramů a hexagramů je možné pomocí těchto dvou znaků složit.

S kombinatorickými otázkami se setkáváme velmi často také v indické matematice. Je znám příklad ze 6. století (lékařský spis), který uvádí všechny typy jednočlenných až šestičlenných kombinací z šesti základních chutí – sladká, slaná, kyselá, hořká, ostrá a trpká. Kombinace se využívaly také v indickém básnictví, kde se vypočítávaly možné kombinace dlouhých a krátkých slabik v *n*-slabičném verši. V témže století indický astrolog Varahamihiru (505-587) ve svém díle *Brihatsamhita* vypisuje všechny možné čtyřčlenné kombinace z 16 různých vůní pro vznik vůní nových. Autor v textu jednoduše uvádí správný výsledek – všech možností je 1820. Neví se, zda-li Varahamihira vypisoval všechny možnosti či na výsledek přišel přímým výpočtem. Vzhledem k tomu, že seznam všech možností nebyl v textu uveden, předpokládá se, že výsledek získal pomocí vztahu pro počet *k*-prvkových podmnožin *n*-prvkové množiny.

V sedmém století, v době vzniku Islámu, si začali indickou matematiku osvojovat Arabové, kteří mimo jiné obohatili světovou kombinatoriku novými znalostmi o magických čtvercích a binomické větě.

Ve 12. století začaly vztahy pro počet kombinací a variací pronikat i do evropských jazyků a ve století sedmnáctém v jednom ze svých významných děl *Cursus Mathematicus* vyjadřuje francouzský matematik Herigonus (1580-1643) vztahy, které v novodobé terminologii označujeme jako kombinace a permutace.

Magické čtverce

Již po několik staletí jsou lidé fascinováni magickými čtverci. Jejich historie, přestože nikdy nepatřily k centrálním matematickým pojmům, je velmi zajímavá. Magické čtverce jsou

---

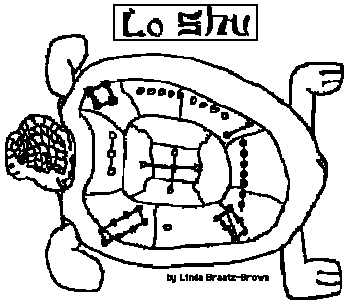
[7] Je považován za nejrozsáhlejší matematický text ze starého Egypta, který se do současnosti dochoval, a jeden z nejstarších matematických textů vůbec.
Ukázka jiné úlohy:

Metoda (výpočtu) prací pastýře.
Inu přišel ten pastýř ke sčítání dobytka se 70 dobytčaty. Ten úředník pro sčítání dobytka pravil k tomu pastýři: málo je kusů dobytka, jež přivádíš! Kde je množství tvých početných kusů dobytka?! Ten pastýř pravil: přivedl jsem ti 2/3 z 1/3 z býků, kteří mi byli svěřeni. Počítej se mnou a shledáš, že jsem úplný. (Výsledek: 315)

Zdroj: Vymazalová, H.: *Staroegyptská matematika - Hieratické matematické texty*. ČEÚ, Dějiny matematiky, Praha 2006, svazek 31.

[8] Množství zrna se ve starověkém Egyptě vyjadřovalo pomocí měřice a jejich částí a násobků (1 měřice = 4,805 l).
Zdroj: Vymazalová, H.: *Staroegyptská matematika - Hieratické matematické texty*. ČEÚ, Dějiny matematiky, Praha 2006, svazek 31.

často považovány za nejstarší písemně doložené matematické objekty. Před více než 4000 roky vznikla v Číně legenda o želvě a řece Lo, která se zachovala v knize Lo Shu. V antické Číně nastala povodeň, kterou lidé připisovali božímu hněvu a aby uspokojili tento boží hněv a zažehnali povodeň, přinášeli Bohu obětné dary. Vždy, když dary přinesli, se nic mimořádného nestalo – pouze to, že z řeky vylezla želva, která obešla oběť a vrátila se zpět do řeky. Několik zvědavých dětí si však povšimlo, že želva má na krunýři podivné znaky, na jejichž základě si lidé uvědomili, kolik obětí mají nosit.



→

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Obr. 2.1: Schéma na krunýři posvátné želvy[9]

Jedná se pravděpodobně o první příklad magického čtverce. Jde o magický čtverec třetího řádu s magickým číslem 15. Toto číslo právě vyjadřovalo počet obětí, které měli staří Číňané nosit na usmíření. Na magické čtverce lidé této doby pohlíželi spíše z hlediska mystického než matematického.

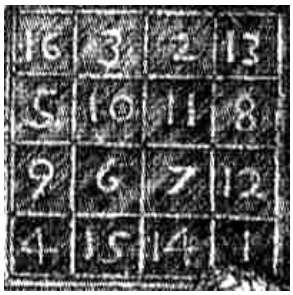
Kdy začaly magické čtverce pronikat z čínské matematiky do arabské, se přesně neví. Za zmínku však stojí druhá kniha díla *Encyclopedia* (asi 990), která pojednává o čtvercích 3., 4., 5. a 6. řádu. Autoři se zmiňují též o existenci čtverců řádu 7., 8. i 9., aniž by uváděli jediné obecné pravidlo, jak magické čtverce vyššího řádu než tři konstruovat.

Magické čtverce pronikly bezpochyby i do řecké matematiky. Počátkem 14. století řecký matematik Moschopoulose (1282-1328) ve svém díle popisuje obecné pravidlo pro konstrukci magických čtverců řádů dělitelných čtyřmi a řádů lichých.

Obr. 2.2: Obraz *Melancolia*[10]

[9] Zdroj obrázku: http://mathforum.org/alejandre/magic.square/loshu1.html

Magické čtverce můžeme najít také v malířství či architektuře. Snad nejznámějším obrazem, na němž se vyskytuje magický čtverec čtvrtého řádu, kde součet číslic v každém řádku, sloupci či úhlopříčce je roven 34, je Dürerův (1471–1528) obraz *Melancolia* z roku 1514.



Obr. 2.3:Magický čtverec z obrazu Melancolia[11]

Další magický čtverec je např. zobrazen na stěně Gaudího katedrály v Barceloně. Magický čtverec je mírně pozměněn tak, aby součet čísel v každém řádku, sloupci a úhlopříčce byl roven číslu 33, což jsou tzv. Kristova léta.

Aritmetický trojúhelník

Aritmetický trojúhelník známe pod pojmem Pascalův trojúhelník. Jedná se o schéma skládající se z kombinačních čísel:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

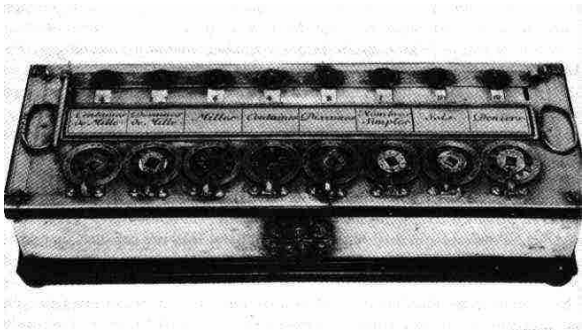
Trojúhelník dostal název po slavném francouzském matematikovi Blaise Pascalovi[12] (1623–1662), který popsal toto schéma ve své významné knize *Traité du triangle arithmétique* (tj. Pojednání o aritmetickém trojúhelníku), kde vyslovil několik základních pouček z kombinatoriky a pravděpodobnosti. Kniha byla napsána v roce 1654, vydaná byla

[10] Zdroj obrázku: http://markfarrar.co.uk/msqhst01.htm
[11] Zdroj obrázku: http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Durer.html
[12] Blaice Pascal měl obrovské matematické nadání a je považován za jednoho z předchůdců moderní výpočetní techniky, neboť sestrojil (již v roce 1642) pro svého otce první mechanický počítací stroj – tzv. Pascalina, na jehož principu fungovaly všechny počítací stroje až do doby, kdy je ovládla elektronika. Již v 16 letech publikoval pojednání o kuželosečkách. Jeho korespondence s Pierrem de Fermatem v roce 1654 je považována za počátek teorie pravděpodobnosti.

o 11 let později. Uvedené výsledky většinou však nejsou jeho původní, neboť např. Pascalův trojúhelník znal již dříve arabský astronom Al-Tusi (13. století) či čínský matematik Chu Ši-Chie (14. století). Kombinační čísla popisuje Blaice Pascal velmi jasně a srozumitelně dvojím způsobem: jako koeficienty binomického rozvoje a jako čísla, která uvádějí počty *k*-prvkových podmnožin dané množiny

První zmínku o aritmetickém trojúhelníku můžeme však najít daleko dříve. Jedná se o dílo islámského matematika Al-Karádžího (953–1029), které se sice nedochovalo, ale jeho myšlenky nám byly zprostředkovány jiným islámským matematikem.

I v Evropě lze nalézt práce o aritmetickém trojúhelníku již dříve než u Pascala. Např. ve 13. století německý matematik Jordanus de Nemor (1225–1260) o nich pojednává ve svém díle *De Arithmetica.*



Obr. 2.4: Počítací stroj Pascalina, který uměl sčítat a odčítat.[13]

Moderní kombinatorika

Přestože se kombinatorikou zabývala řada matematiků v průběhu celé historie matematiky, začíná se díky teorii pravděpodobnosti kombinatorika vydělovat teprve v polovině 17. století jako samostatná část matematiky. V této době bylo napsáno hned několik děl, které významně přispěly k rozvoji kombinatoriky. V roce 1665 to byla již výše zmíněná Pascalova kniha *Traité du triangle arithmétique*. Motivací této práce bylo předpovídání výsledků hazardních her. Pascal se pokusil vyřešit úlohu o spravedlivém rozdělení sázky:

„Dva hráči hrají sérii her o nějakou částku C; tuto částku získá ten hráč, který jako první vyhraje k her (lidově se někdy říká, že hráči hrají na k vítězných her). Pravděpodobnost výhry v každé jednotlivé hře je pro oba hráče stejná (oba hráči jsou „stejně dobří“). Série her je předčasně ukončena ve chvíli, kdy jednomu hráči chybí do výhry m her, druhému hráči chybí do výhry n her. Jak má být spravedlivě rozdělena částka C mezi hráče?“ [14]

Za první samostatné kombinatorické pojednání bývá někdy považována Leibnizova práce *Ars combinatoria*. Spis byl vydán v roce 1666, kdy bylo Leibnizovi 20 let a matematikou se ještě vůbec nezabýval. Plný název spisu nasvědčuje tomu, že Leibnizovi vlastně o matematiku ani nešlo a užíval ji pouze jako nástroje k řešení problémů, které bychom dnes nejspíše označili jako logicko-filozofické (ostatně v některých vydáních Leibnizových spisů je tento spis řazen mezi spisy filozofické). Spis má zhruba 100 stran

[13] Zdroj obrázku: http://www.gap-system.org/~history/Mathematicians/Pascal.html
[14] Zdroj: Mačák, K.: *Počátky počtu pravděpodobnosti*. Prométheus, Praha, 1997.

a problematice matematické je věnována (nejvýše) polovina z nich. Z historického hlediska je třeba konstatovat, že se zde znovu (nezávisle na Pascalovi) objevuje aritmetický (tj. Pascalův) trojúhelník i některé další pojmy a výsledky kombinatorické.[15]

Kombinatorikou se zabýval i významný švýcarský matematik Jakob Bernoulli[16] (1654–1705). Své poznatky sepsal v letech 1679–1685 v nedokončeném spise *Ars conjectandi*, který byl vydán Jakobovým synovcem Niclausem osm let po Jakobově smrti, tj. roku 1713.

Vlastní spis má 239 stran formátu (přibližně) A5 a je členěn do čtyř částí. První část je věnována hazardním hrám. Druhá část je v podstatě učebnicí kombinatoriky, třetí část lze charakterizovat jako sbírku kombinatorických úloh s herní motivací. Z hlediska historie počtu pravděpodobnosti byla nejdůležitější čtvrtá část knihy, a to i přesto, že zůstala nedokončená. Jejím hlavním přínosem byla první formulace a důkaz zákona velkých čísel.[17]

Dalo by se říci, že dnešní učebnice středoškolské kombinatoriky se od spisu *Ars Conjectandi* příliš neliší. Někdy je právě toto dílo považováno za završení období formování kombinatoriky jako relativně samostatné části matematiky.

Osobnost, jež má jeden z nejvýznamnějších podílů na vývoji kombinatoriky a která zvlášť významně přispěla k rozvoji této vědní disciplíny, byl Leonhard Euler (1707-1783).

Obr. 2.5: Leonhard Euler na švýcarské bankovce[18].

Již v roce 1723 získal Euler magisterský titul v oboru filozofie, dále studoval teologii, ale opravdové nadšení pro studium našel až v matematice, jejíž studium dokončil na univerzitě v Basileji[19] v roce 1726 (jeho učitelem matematiky byl Johann Bernoulli). Euler je považován za nejplodnějšího matematika všech dob. Kromě matematické analýzy a algebry se mimo jiné také zabýval binomickým rozvojem (připisuje se mu symbol pro kombinační

[15] Zdroj: Mačák, K.: *Počátky počtu pravděpodobnosti*. Prométheus, Praha, 1997.

[16] Jakob I Bernoulli studoval nejenom teologii, ale také se zabýval matematikou a astronomií, i když s tím jeho otec nesouhlasil. Od roku 1687 až do své smrti byl profesorem matematiky na basilejské univerzitě. Kromě kombinatoriky a teorie pravděpodobnosti se také mimo jiné zabýval matematickou analýzou a mechanikou. Jeho žákem byl např. otec Leonharda Eulera.

[17] Zdroj: Mačák, K.: *Počátky počtu pravděpodobnosti*. Prométheus, Praha, 1997.

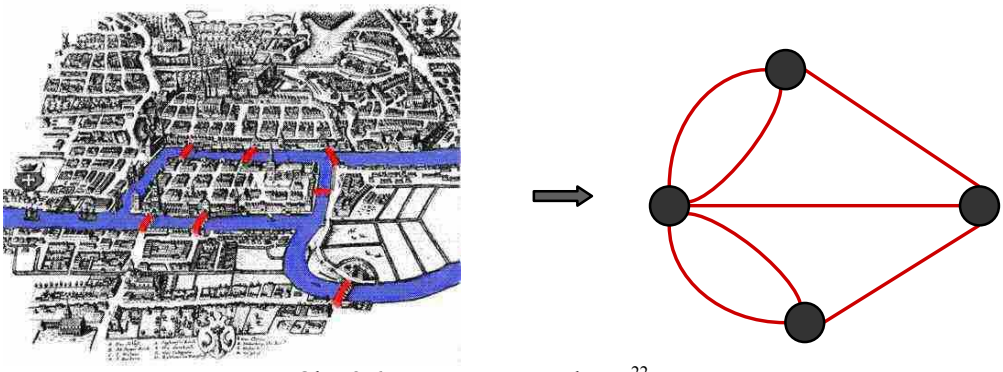
[18] Zdroj: FLAJOLET, P.,SEDGEWICK, R.: *Analytic combinatorics – Symbolic combinatorics*. 2002. Online text: http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/FlSe02.pdf

[19] Leonhard Euler se po ukončení studií na univerzitě v Bazileji ucházel o místo na katedře fyziky, pro svůj mladý věk (19 let) byl však odmítnut. Během svého života působil na akademii v Petrohradě, v Berlíně a právě na akademii v Berlíně dosáhl nejvýznamnějších matematických výsledků. Velmi významné jsou jeho práce z matematické analýzy, kterou se zabýval téměř celý život.

číslo), latinskými čtverci, vytvořujícími funkcemi atd. V roce 1728 zformuloval slavnou *úlohu o 36 důstojnících*[20], jež souvisí s konstrukcí dvou ortogonálních latinských čtverců šestého řádu. Po mnoha pokusech, kdy se snažil zkonstruovat tyto čtverce, vyslovil hypotézu, že takové ortogonální čtverce neexistují. Úloha však byla dokázána až po jeho smrti francouzským matematikem G. Tarrym roku 1900. V „rekreační matematice“ a v relativně samostatné části diskrétní matematiky zvané teorie grafů, je s Eulerovým jménem spojována známá úloha o sedmi mostech města Královce. Její znění je následující:

„Městem Königsberg (česky Královec, v současnosti tzv. Kaliningrad v Rusku – bývalá metropole Východního Pruska) teče řeka Pregel. V této řece jsou dva ostrovy, které byly s pevninou a vzájemně propojeny sedmi mosty. Úkolem je zjistit, zda je možné vyjít z jednoho místa, projít po každém mostě právě jednou a skončit procházku ve výchozím bodě.“

Úkolem tedy bylo zjistit, zda je možné graf z obr. 2.6 „namalovat jedním tahem“. Euler nejenže v roce 1736 tuto úlohu vyřešil – dokázal, že graf jedním tahem sestrojit nelze, ale také obecně vyřešil, které „grafy“ jedním tahem namalovat lze.[21]



Obr. 2.6: Mapa města Královce[22]

Za zmínku též stojí problém týkající se tzv. polomagických čtverců (součet čísel v každém řádku a sloupci je stejný, nemusí to však platit pro úhlopříčky), kterými se Euler rovněž zabýval. Problém by se dal formulovat takto:

„Může šachový kůň postupně projít všechna pole na šachovnici tak, aby na každé pole vstoupil právě jednou?“

Euler našel pěkné řešení a to v době, kdy již byl dávno slepý. Měl však tak výjimečnou paměť, že byl schopen ve vědecké práci pokračovat. Zapíše-li se řešení do čtverce tak, že kůň skáče z pole označeného n na pole $n+1$, dostaneme čtverec, jenž je znázorněn na obr. 2.7.

Tímto problémem se později zabýval i např. šachista Jaenisch. Jeho řešení nejenže tvoří rovněž polomagický čtverec, ale kůň také může skočit z pole č. 64 na pole s č. 1, tzn. že z posledního pole své cesty může skočit na výchozí pole. V teorii grafů je takový graf považován za hamiltonovský.

---

[20] *„Sestavte 36 důstojníků 6 různých hodností ze šesti různých pluků do čtverce tak, aby v žádné řadě ani v žádném zástupu nestály dva důstojníci stejné hodnosti ani dva důstojníci ze stejného pluku.“*

[21] Více např. v publikaci: Fuchs, E.: *Diskrétní matematika pro učitele*. Brno 2001.

[22] Zdroj: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Mathematicians/Euler.html

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Obr.2.7: Cesta šachového koně[23]

Na přelomu 17. a 18. století žijící matematik Abraham de Moivre[24] (1667-1754) bývá často považován za „objevitele“ principu inkluze a exkluze, který aplikoval na proslulou úlohu – *problém derangement* (problém šatnářky). Formulace tohoto problému je následující:

„Do šatny odevzdalo n osob svůj klobouk. Jaká je pravděpodobnost toho, že když všichni ztratili lístek od šatny a šatnářka jim klobouky při odchodu vydávala zcela nahodile, dostal alespoň jeden člověk svůj klobouk?“

Za objevitele je *de Moivre* považován převážně z toho důvodu, že princip inkluze a exkluze popsal jako první. Je ovšem velmi pravděpodobné, že tento princip byl znám již mnohem dříve, ovšem o jeho původu se nám nedochoval žádný důkaz.

Princip inkluze a exkluze se dá použít i při řešení další velmi známé *úlohy o hostech* (*the ménage problem*).

„Kolika způsoby můžeme rozsadit kolem kulatého stolu n manželských párů tak, aby se muži a ženy pravidelně střídali a žádní dva manželé přitom neseděli vedle sebe?“

Jako první nám tuto úlohu zprostředkovává Eduard Lucas (1842-1891) v roce 1891.

V 19. století se na kombinatoriku nahlíží jako na již běžnou část matematiky. Za další význačné datum pro kombinatoriku je považován rok 1901, neboť německý matematik Eugen Netto (1848-1919) vydává učebnici kombinatoriky *Lehrbuch der Kombinatorik*, jež obsahuje veškeré tehdejší kombinatorické znalosti. Často se podle autora této učebnice říká, že „kombinatorika je část matematiky zabývající se rozdělováním, uspořádáním, nebo výběrem prvků nějaké množiny“[25].

Devatenáctému století je připisován i známý tzv. Dirichletův princip (příhrádkový princip, neboli tzv. princip zásuvek). Jako první ho výslovně použil německý matematik Peter

[23] FUCHS, Eduard.: *Magické čtverce aneb od knihy I-ťing k internetové současnosti*. In *Matematika, fyzika a vzdělávání.* Brno : VUTIUM, 2004.
[24] Abraham de Moivre se narodil ve Francii, studoval na známé univerzitě – Sorbonna, v letech 1685-1688 byl jako protestant vězněn, poté emigroval do Anglie. Zabýval se mimo jiné teorií řad, teorií pravděpodobnosti, komplexními čísly.
[25] Fuchs, E.: Diskrétní matematika pro učitele. MU, Brno 2001.

Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), který se rovněž zabýval teorií čísel a matematickou analýzou.

Dvacáté století je obdobím bouřlivého rozvoje matematiky. Kombinatorické metody se využívají v geometrii, statistice, programování, při sestavování a luštění kódů, atd. V souvislosti s rozvojem výpočetní techniky se začala rozvíjet celá diskrétní matematika, docházelo k její vnitřní diferenciaci a vznikla celá řada nových částí matematiky.

2.1 Vhodné a zajímavé zdroje historie matematiky:

[1] BIGGS, N. L., LLOYD, E. K., WILSON, R. J.: Handbook of Combinatorics. The Mit Press, Cambridge, Massachusetts, 1995. ISBN 0-444-88002-X

V knize je historii kombinatoriky věnována jedna kapitola, konkrétně 44., str. 2163 – 2198. Kapitola popisuje kombinatoriku ve středověku, její moderní počátky, vznik teorie grafů, teorie množin a algoritmy v kombinatorice.

[2] BIGGS, N. L.: The roots of combinatorics. Historia Math. 6 (1979), s.109 – 136

[3] EVES, H.: An introduction to the history of mathematics. Saunders College Publishing,. ISBN 0-03-029558-0

Dílo je rozdělena do dvou základních kapitol a podává celkový přehled o historii matematiky. První kapitola pojednává o její historii před 17. stoletím (např. babylónské, egyptské, řecké, čínské, indické a arabské, včetně evropské od 5. do 16. století). Druhá kapitola je věnována historii matematiky 17. století a později. Jsou zde popsány různé matematické problémy, jež jsou spjaty s nejvýznamnějšími jmény nejen matematického světa jako např. Naper, Galileo, Kepler, Pascal, Fermat, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Bernoulli a celá řada dalších.

[4] FAUVEL, J., GRAY, J.: The history of Mathematics. A Leader. Macmillan press LTD, Basingstoke, 1987. ISBN 0-333-42790-4

Práce podává obecný přehled o historii matematiky. Obsahuje přehled celé řady významných matematiků včetně jejich teorií a matematických problémů, na jejichž řešení se podíleli.

[5] FUCHS, E.: Diskrétní matematika pro učitele. Masarykova univerzita, Brno, 2001. ISBN 80-210-2703-7

Publikace je rozdělena do dvou základních částí. První je věnována kombinatorice a druhá poskytuje základní pojmy z teorie grafů. Celým textem se prolínají historické zajímavosti týkající se dané problematiky a přestože je práce určená především studentům vysokých škol, lze z ní čerpat i pro výuku na středních školách. V první kapitole autor velmi srozumitelně popisuje základní kombinatorické pojmy, princip inkluze a exkluze, rozdělování do přihrádek, rozklady konečných množin, vytvořující funkce aj.

[6] FUCHS, Eduard.: Magické čtverce aneb od knihy I-ťing k internetové současnosti. In *Matematika, fyzika a vzdělávání.* Brno : VUTIUM, 2004. ISBN 80-214-2601-2, s. 29-63. Online text: http://bart.math.muni.cz/~fuchs/Efuchs/historie_pdf/mactv.pdf

Článek pojednává o historii, vývoji magických čtverců, jež jsou spojeny převážně s čínskými dějinami. Velmi zajímavě popisuje i jeden z nejstarších dochovaných textů čínské civilizace, knihu I-ťing (Kniha proměn) a jedna kapitola je i věnována magickým čtvercům v Evropě.

[7] KATZ, J. V.: A history of Mathematics. Addison-Wesley ducational Publisher, 1998. ISBN 0-321-01618-1

Publikace je rozdělena do 4 částí. První se věnuje historii matematiky před 6. stoletím, druhá popisuje matematiku v období 6. – 14. století, další pak poskytuje informace o historii matematiky v 15. – 17. století a poslední je věnována moderní matematice, tj. 18. – 20. století. Autor se zabývá rozvojem algebry, analýzy, pravděpodobnosti a geometrie v různých stoletích. Kombinatorice jsou věnovány kapitoly ve druhé části publikace a dále v rámci pravděpodobnosti.

[8] MAČÁK, K.: Počátky počtu pravděpodobnosti. Prométheus, Praha, 1997. ISBN 80-7196-089-6

Kniha je věnována vzniku počtu pravděpodobnosti ve druhé polovině 17. století. Je rozdělena do čtyř částí. První je úvodem do historie vzniku počtu pravděpodobnosti a předkládá přehled hlavních výsledků Pascalových, Fermatových či Huygensových včetně základních údajů o souvisejících spisech z oblasti kombinatoriky a pojistné matematiky. Ve druhé kapitole je rozebrán Huygensův spis *De ratiociniis in ludo aleæ*, třetí kapitola popisuje Pascalovo pojednání o *Traité du triangle arithmétique* a čtvrtá část se věnuje spisu Jakoba Bernoulliho *Ars conjectandi*.

[9] http://www.ams.org/mathweb/index.html - (stav k 13. 7. 2010)

[10] http://archives.math.utk.edu/topics/history.html - (stav k 10. 7. 2010)

[11] http://www.gap-system.org/~history/Mathematicians - (stav k 5. 5. 2010)

[12] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html - (stav k 20. 5. 2010)

[13] http://markfarrar.co.uk/msqhst01.htm - (stav k 20. 5. 2010)

[14] http://mathforum.org/isaac/mathhist.html - (stav k 7. 6. 2010)

[15] http://mathforum.org/library/topics/history/ - (stav k 11. 6. 2010)

[16] http://www.math.muni.cz/~sisma/history/uvod.html - (stav k 12. 5. 2010)

[17] http://vedci.wz.cz/ - (stav k 2. 6. 2010)

3 INTERAKTIVNÍ UČEBNICE (i-učebnice)

Tato kapitola obsahuje nejenom seznam kombinatorických úloh, které jsou spolu s animacemi řešení klíčovými body učebnice, ale i seznam kvízů, jež jsou pro zpestření přiřazeny k některým úlohám a jejichž téma úzce souvisí se zadáním úloh. Je jen a jen na učiteli a atmosféře ve třídě, zda kvíz použije. Připravené slovní hádanky či zábavné hry je vhodné použít v případě, kdy se studenti už nesoustředí na probíranou látku a potřebují malou pauzu. U některých příkladů či kvízů se objevují i otázky k zamyšlení, popř. soutěže. Animace řešení učiteli usnadňují a ulehčují práci, nemusí nic psát na tabuli a celou dobu se může plně věnovat výkladu a chování žáků.

Interaktivní učebnice je připravena tak, že různé typy příkladů se prolínají (studenti se naučí lépe „kombinatoricky přemýšlet“), neboť se domnívám, že není dobré řešit určitou dobu úlohy zaměřené pouze na jednu část kombinatoriky, což se praktikuje na mnoha školách.

Celá tato kapitola by měla poskytnout uživatelům ucelené informace, je psaná srozumitelně a pro názornost jsou připojeny i obrázky znázorňující jednotlivé stránky interaktivní učebnice. Vyučující používající i-učebnici musí umět do určité míry pracovat s interaktivní tabulí SMART Board, ovládat ji, využívat její možnosti a samozřejmě být poučen i o bezpečnosti práce. Učitel může volit nejen své vlastní tempo, ale i příklady k řešení (neřešené příklady se jednoduše přeskočí). K pochopení základních kombinatorických pravidel a typů kombinatorických úloh není zapotřebí využívat jiné zdroje či publikace, nicméně záleží na každém zvlášť, jak s i-učebnicí vynaloží.

Veškeré obrázky objevující se v interaktivní učebnici byly vytvořeny buď v programu Smart Notebook, v programu Malování, nebo vybrány z Galerie obrázků Smart Notebook či ze souboru obrázků vyskytující se na portálu http://www.google.cz/. Animace řešení a obrázky s nimi související jsou připraveny v programu PowerPoint. Učebnici si každý vyučující může dál upravovat, přidávat informace, které pokládá za důležité a celý kurz si tak pozměnit k obrazu svému.

3.1 Kombinatorika bez opakování

Každá připravená stránka (šablona) této části interaktivní učebnice je vložena do příručky jako obrázek, pod kterým je srozumitelně popsáno, jak se stránkou pracovat, čeho lze využít a zda je příklad i obohacen o animaci řešení, kvíz apod.

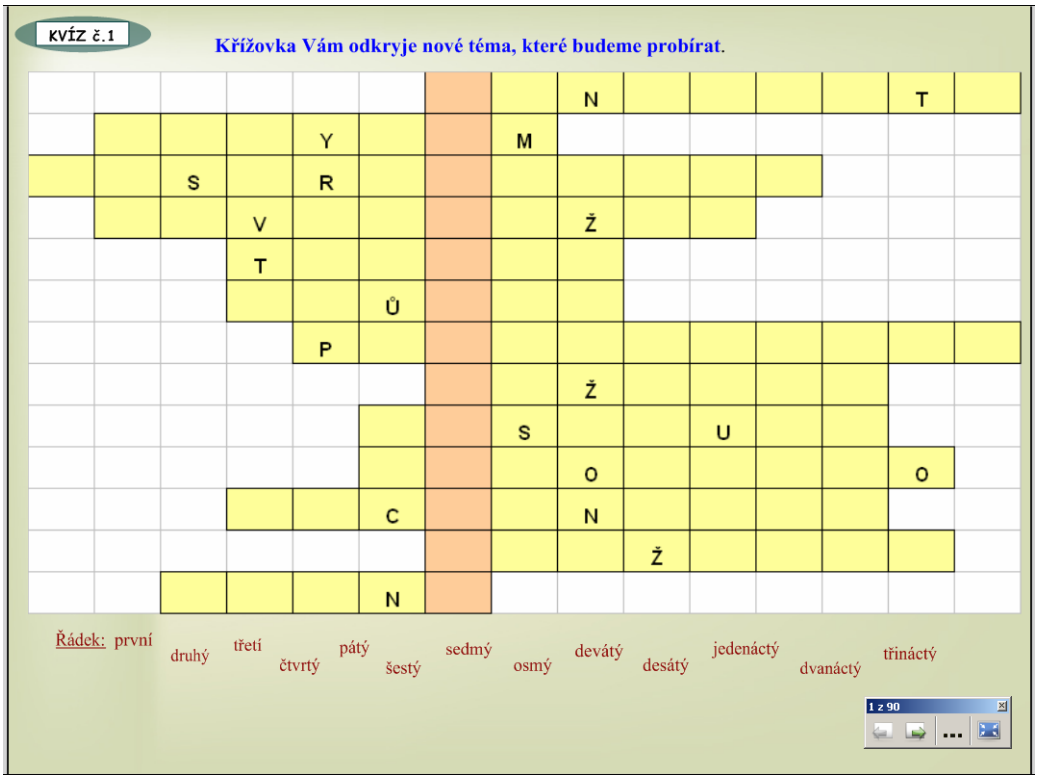
Většina šablon využívá tzv. stínítko neboli speciální „roletku“, což je šedivý pruh nacházející se nejčastěji v dolní části stránky. Cílem „roletky“ je v daném okamžiku skrýt vše, co zatím nemá být viděno. Dá se posouvat ve směru vertikálním i horizontálním. Pokud je na stránce vložena, je vhodné ji použít.

Je velmi důležité, aby studentům „neutekl“ začátek, správně pochopili obě základní kombinatorická pravidla (součtu a součinu), a proto doporučuji zastavit se u každého příkladu tak dlouho, jak je potřeba. Rovněž je vhodné, neustále studentům ukazovat, že neexistuje pouze jeden způsob řešení jednotlivých příkladů. Učitel by však neměl různé způsoby řešení (ne všechna jsou vždy znázorněna v připravených listech) studentům předložit bez jejich přemýšlení, měl by nad řešením se studenty diskutovat, neboť pouze opisováním z tabule se kombinatoriku nenaučí. Samozřejmě to znamená náročnější přípravu vyučujícího a co je důležité, sám musí kombinatorice rozumět a být do určité míry znalcem této části matematiky.

Myslím si však, že právě tento způsob výuky představuje první úspěšný krok ke zvládnutí celého učiva.

3.1.1 Šablony první části i-učebnice

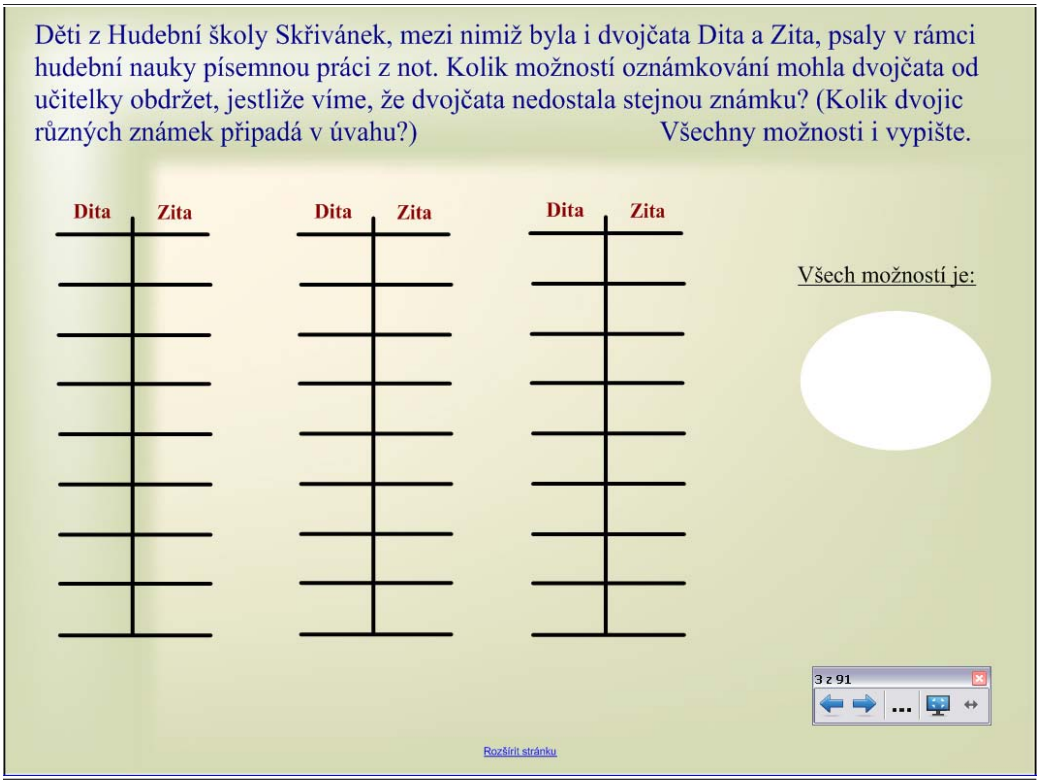
1. šablona



Na zahájení je zvolena jako motivační prvek křížovka, jejíž tajenkou je slovo *kombinatorika*. Otázky k jednotlivým řádkům jsou specifikovány v dolní části šablony pod označením - Řádek. Např. chceme-li vyluštit druhý řádek, stačí kliknout na slovo „druhý“ a ukáže se otázka v podobě obrázku. Speciální tužkou se pak do daného řádku zapíše správná odpověď. U luštění si studenti mohou zopakovat již dříve probrané matematické pojmy.

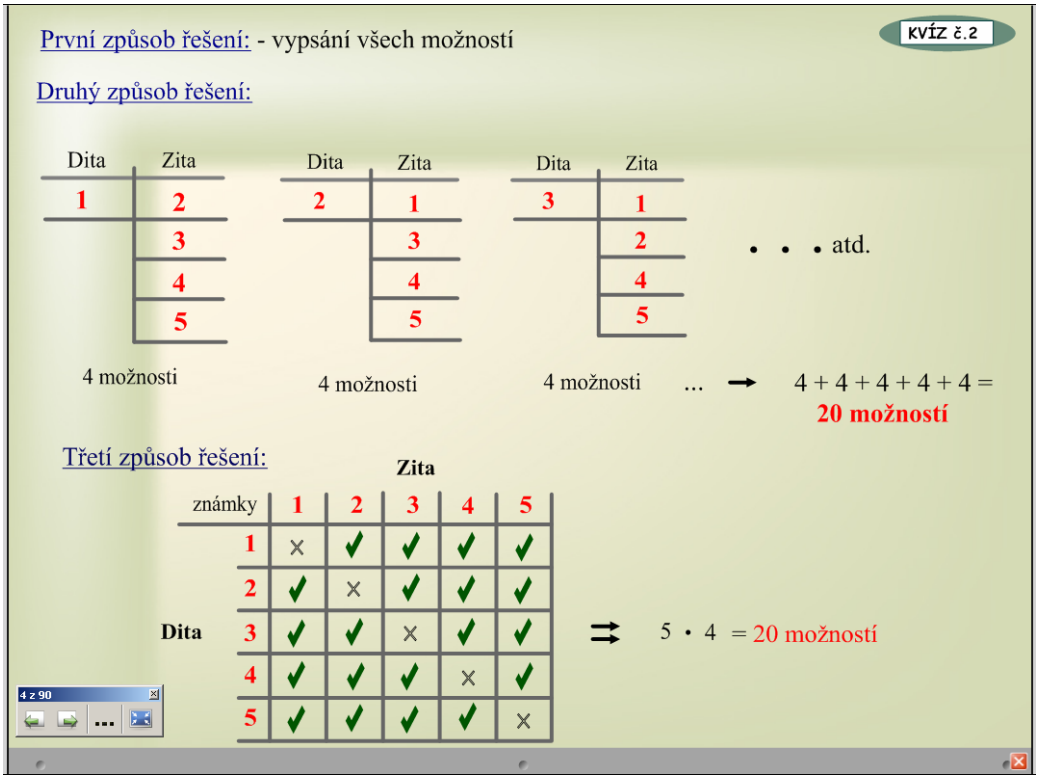
2. šablona
   Tato šablona obsahuje seznam základních kombinatorických pojmů včetně seznamu kvízů. Jedná se o kombinatorická pravidla součtu a součinu, pojmu $n!$, kombinační číslo, vztahy mezi kombinačním číslem a $n!$, Pascalův trojúhelník. Kliknutím na světlý obdélníček, který se nachází pod každým bodem seznamu, se posunete v kurzu na stránku, jež obsahuje daná fakta. Zpět na hlavní menu se vrátíte tímto rychlým způsobem pouze ze seznamu kvízů.

3. šablona



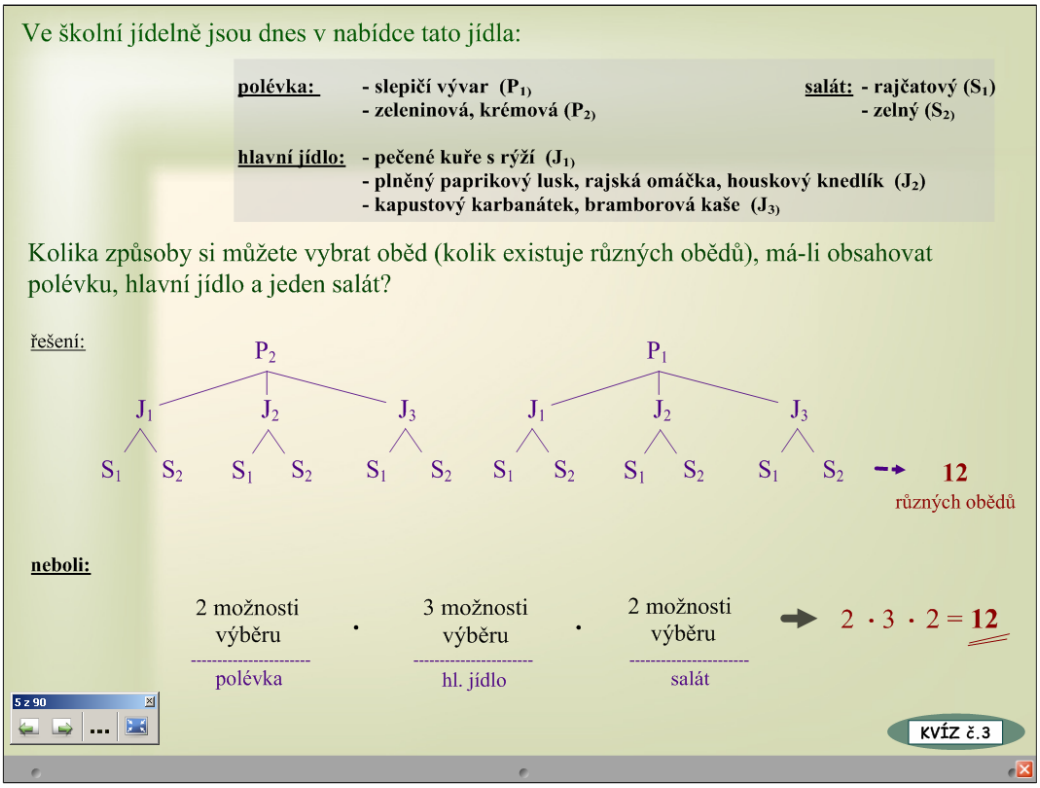
Na této šabloně se již vyskytuje první úloha. Studenti mohou nejprve do připravené tabulky vypsat všechny možnosti, které přidají v úvahu. Správnou odpověď zapíší do bílého oválu a následně se zamyslí nad jiným způsobem řešení. Učitel by měl věnovat určitý čas právě diskusi k těmto řešením.

4. šablona



Touto šablonou může vyučující velmi podrobně rozebrat daný příklad a ukázat studentům již na začátku celého kurzu, že ke správnému výsledku lze dojít několika způsoby. Šablona využívá speciální „roletku“ pro zakrytí některého ze způsobu řešení. Příklad obsahuje kvíz č.2.

5. šablona



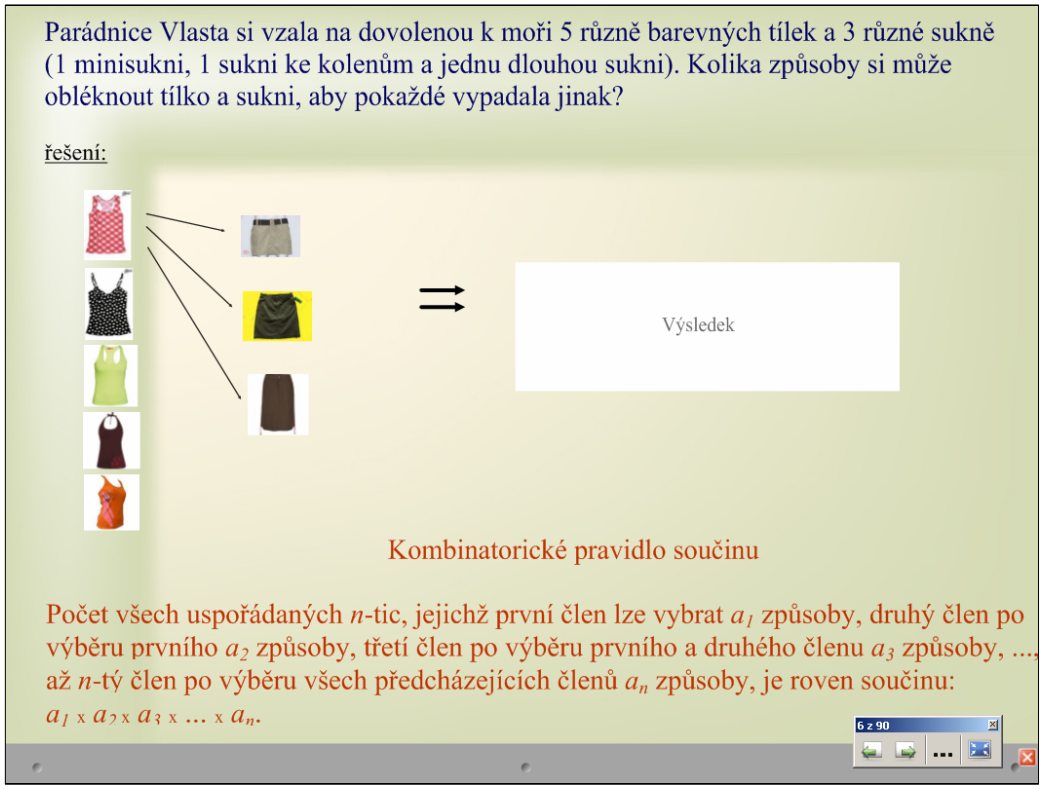
I tento příklad je zaměřen na kombinatorické pravidlo součinu. Studenti by nejprve měli dostat prostor pro vyřešení a teprve poté může vyučující postupně odkrývat jednotlivá řešení a pomalu je vysvětlovat, přičemž neustále může na stránce cokoliv podtrhnout, zakroužkovat, zvýraznit apod.

V pravém dolním rohu se nachází ikona pro kvíz (otázku pro zpestření látky). U kvízu se také objevuje jedna jednoduchá kombinatorická úloha:

K dispozici jsou písmena slova ZEMÁKY v různých barvách – 1x Z, 3 různobarevná písmena E, 1x M, 2 různobarevná písmena Á, 1x K, 1x Y. Kolik různě barevných názvů „ZEMÁKY“ můžeme utvořit z těchto písmen?

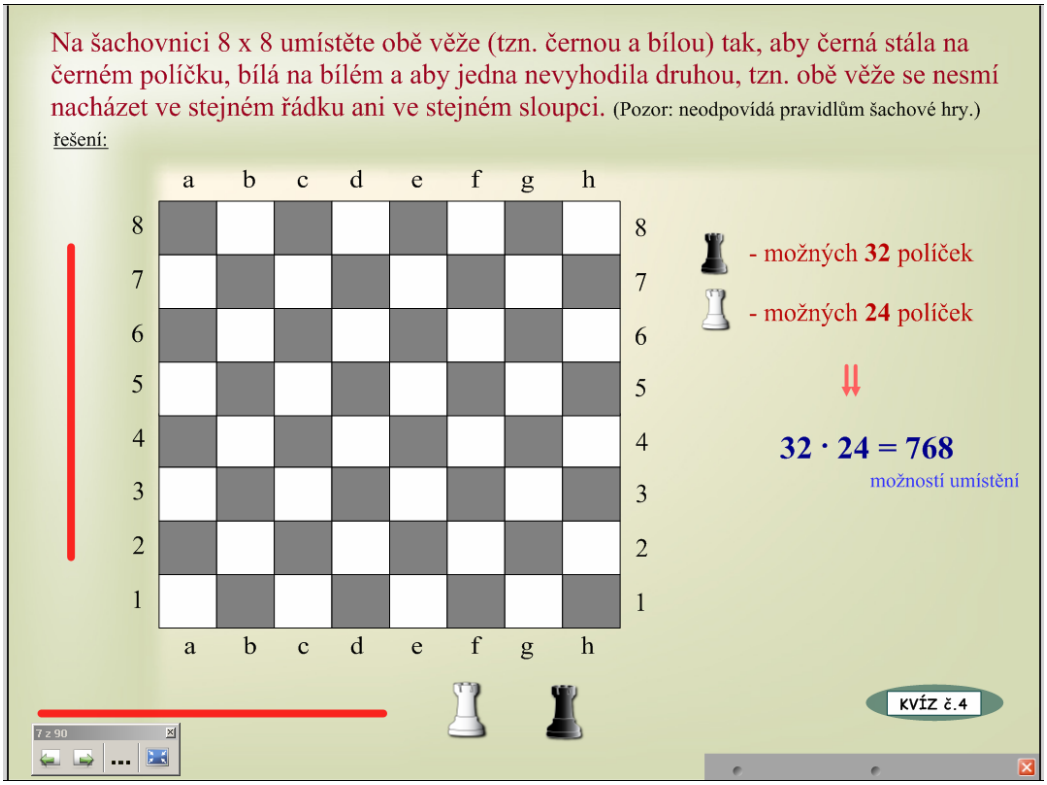
Pod oranžovým obdélníčkem (stačí odkliknout) se nám ukáže správná odpověď (šest možností).

6. šablona



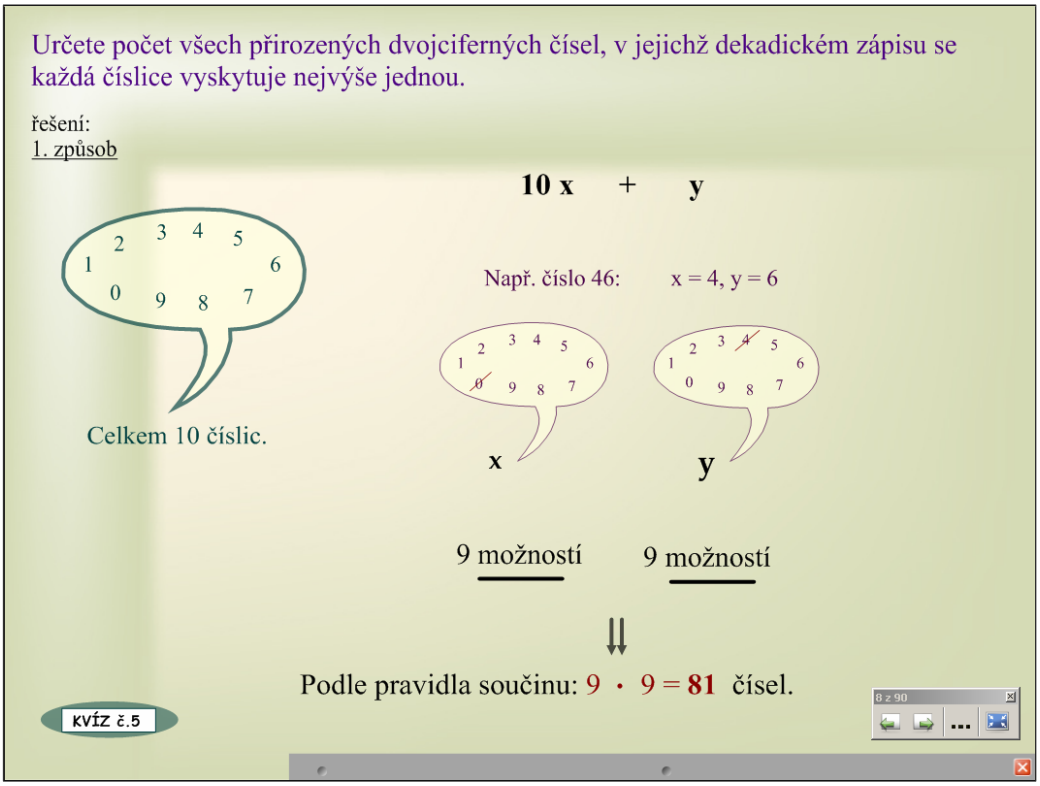
Zde je výhodné využít stínítko, které nám nejprve zakryje vše kromě zadání. Postupně lze pak odkrývat řešení, přičemž pod bílým obdélníkem je schovaná správná odpověď (stačí obdélníkem posunout).
Po odkrytí zbylé části stránky se studenti seznámí s prvním kombinatorickým pravidlem - pravidlem součinu a znovu si na tomto příkladu názorně ukáží, co toto kombinatorické pravidlo definuje.

7. šablona



U šachovnice jsou k dispozici dvě věže - bílá a černá, a dvě červené úsečky na sebe kolmé, pomocí nichž je možné si na šachovnici detailně ukázat, kolik existuje všech možností umístění věží. S úsečkami, bílou a černou věží se dá pohybovat. Stačí přiložit prst na daný objekt a posunout jej jinam.

8. šablona



Toto zadání je převzaté z kombinatorických učebnic a sbírek, kde se hojně využívá. Jedná o názorný příklad, na kterém lze jasně ukázat rozdíl mezi kombinatorickými pravidly součinu a součtu. Z tohoto důvodu byl příklad vložen i do této i-učebnice.

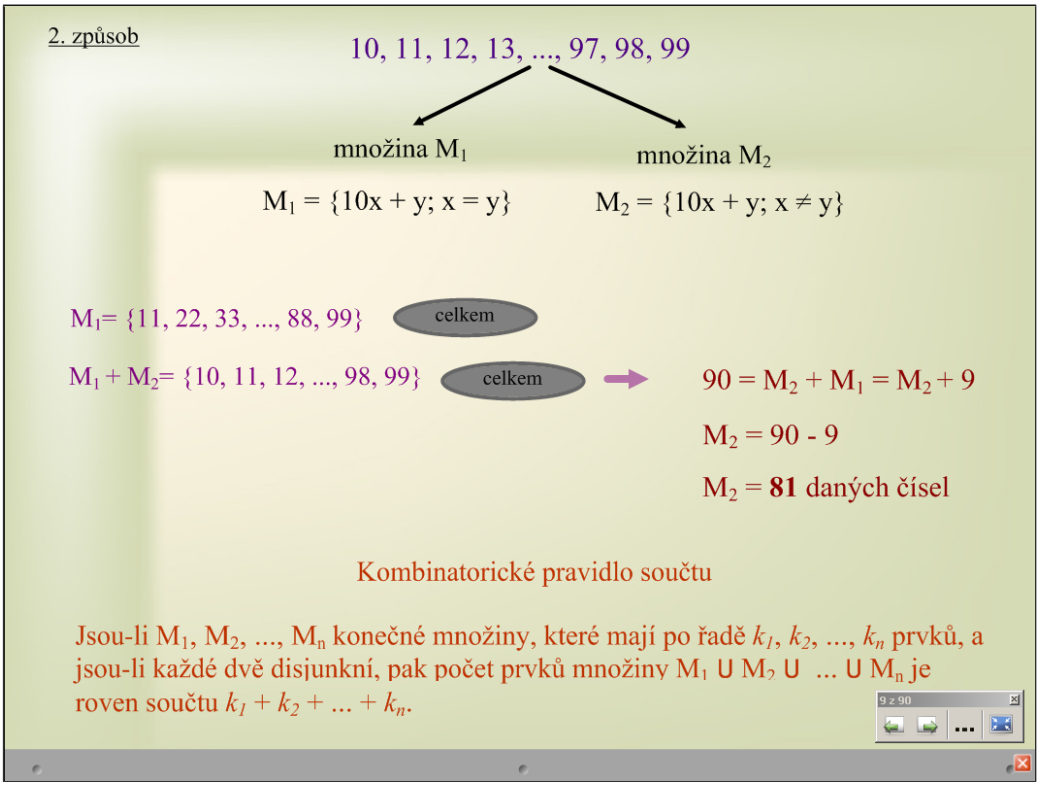
První způsob řešení je založen na kombinatorickém pravidlu součinu, kdy se určuje počet číslic, která můžeme vložit do dvojciferného čísla na místa desítek a jednotek.

Na kvíz, v pořadí již pátý, navazuje následující jednoduchá úloha.

Kolik existuje přirozených čísel menších než 100 složených z prvních 7 čísel Fibonacciho posloupnosti? Fialový obdélník skrývá správnou odpověď (5 + 6 + 4x5 = 31).

Připraveným stínítkem je vhodné nejprve úlohu zakrýt a studenty kvízem odreagovat.

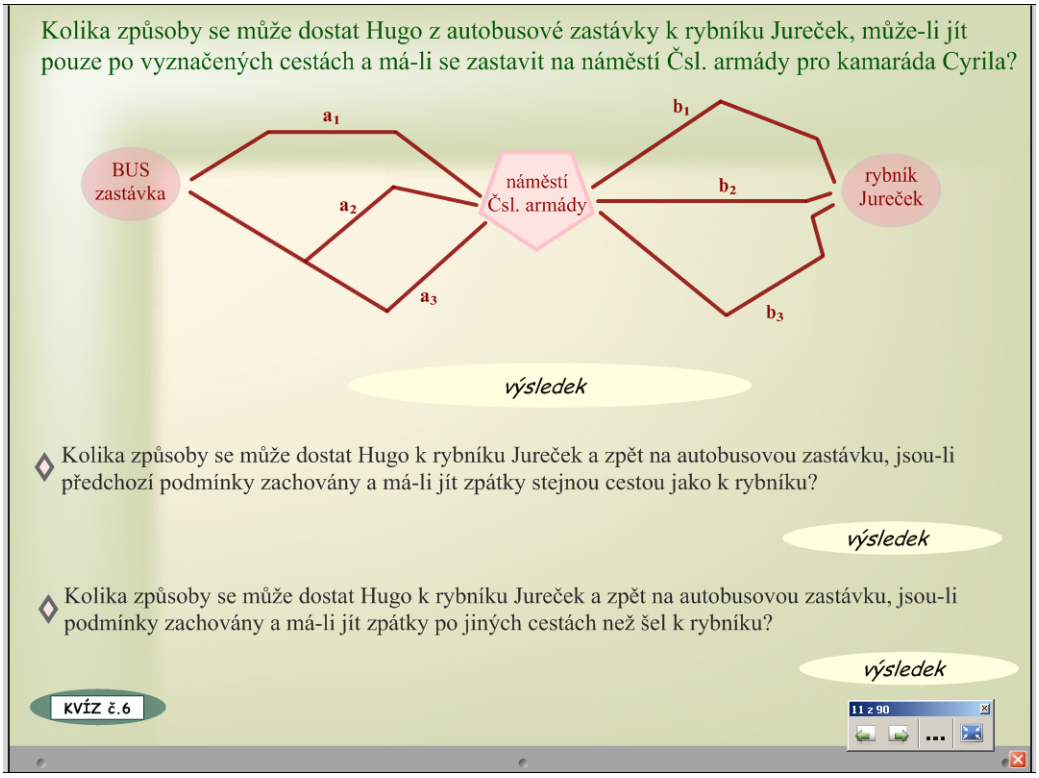
9. šablona



Tato šablona obsahuje druhý způsob řešení předchozí úlohy (šablona č. 8). Využívá se zde druhého základního a velmi důležitého kombinatorického pravidla součtu.

Úlohu většinou studenti budou řešit prvním způsobem, a tudíž se nabízí otázka jiného řešení. Pokud druhý způsob řešení nikoho nenapadne, pozvolným odkrýváním stínítka je možné jej se studenty podrobně probrat a poté definovat kombinatorické pravidlo součtu.

10. šablona – obsahuje pouze mapu a zadání příkladu, které se objevuje i na následující šabloně č. 11.
11. šablona

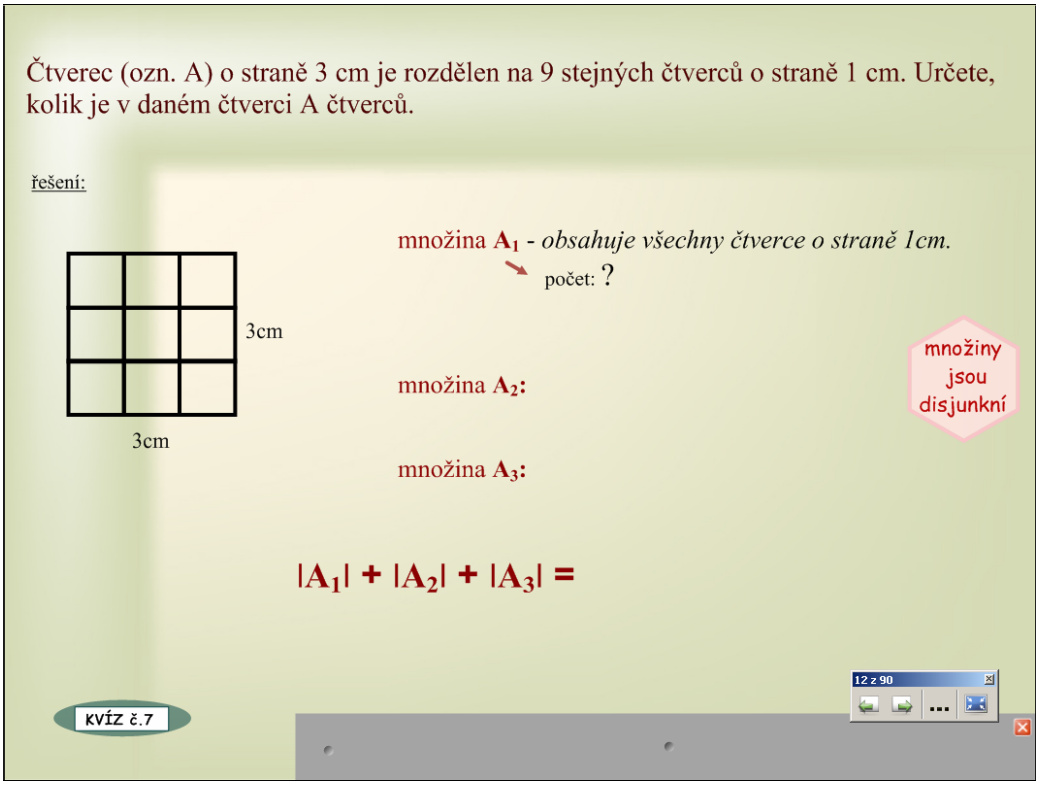


Jednoduchá mapa znázorňuje všechny možné cesty z autobusové zastávky k rybníku Jureček. Pod bílými poli se vyskytují správné odpovědi, které se ukáží posunutím bílých ploch. Příklad ukazuje rozdíl mezi kombinatorickým pravidlem součtu a součinu. Při použití pravidla součtu je řešením součet 3 + 3 + 3. Řešením pravidla součinu je součin 3krát 3.

Další dvě otázky obsahují omezující podmínky a celá úloha je komplikovanější.

Kvíz č. 6 nás mimo jiné zavede do Moravskoslezských Beskyd, kde se nachází jedna z nejznámějších kaplí sv. Cyrila a Metoděje.

12. šablona



Ukázkový příklad kombinatorického pravidla součtu. S žádnými objekty nelze na stránce manipulovat, pouze speciální tužkou je možné čtverečky o stejných délkách označovat, kroužkovat apod.

Kvíz č. 7 je pro studenty velmi atraktivní, neboť si mohou v rámci úkolu zkusit jeden latinský čtverec vyplnit.

Následující šablony představují celou řadu jednoduchých příkladů k procvičení rozdílů mezi kombinatorickými pravidly součtu a součinu; pravidly, na nichž je založená celá kombinatorika.

13. šablona

Úloha zaměřená na pravidlo součinu. Studenti si mohou nejprve všechny možnosti řešení bez použití pravidla součinu ukázat. K tomu je připravena v levé části tabulka a v pravé horní části tři míče, u kterých je nastaven tzv. „nekonečný klonovač“. Každý míč lze vzít nekonečně mnohokrát a vložit do připravené tabulky. Tento postup řešení jasně ukáže, zda studenti umí postupovat systematicky. Je rozdíl, zda se míče vkládají do tabulky nahodile či podle určitého pravidla. Následujícím krokem by mělo být řešení s využitím kombinatorického pravidla součinu (viz – Jiné řešení).

Pokud se najdou studenti, kterým stále kombinatorické pravidlo součinu není úplně jasné a příkladu nerozumí, je možné jim spustit pro lepší pochopení připravenou animaci, jež se nachází v levém dolním roku. Stačí kliknout na zelenou hvězdičku a učitel se může plně věnovat vysvětlení úlohy.

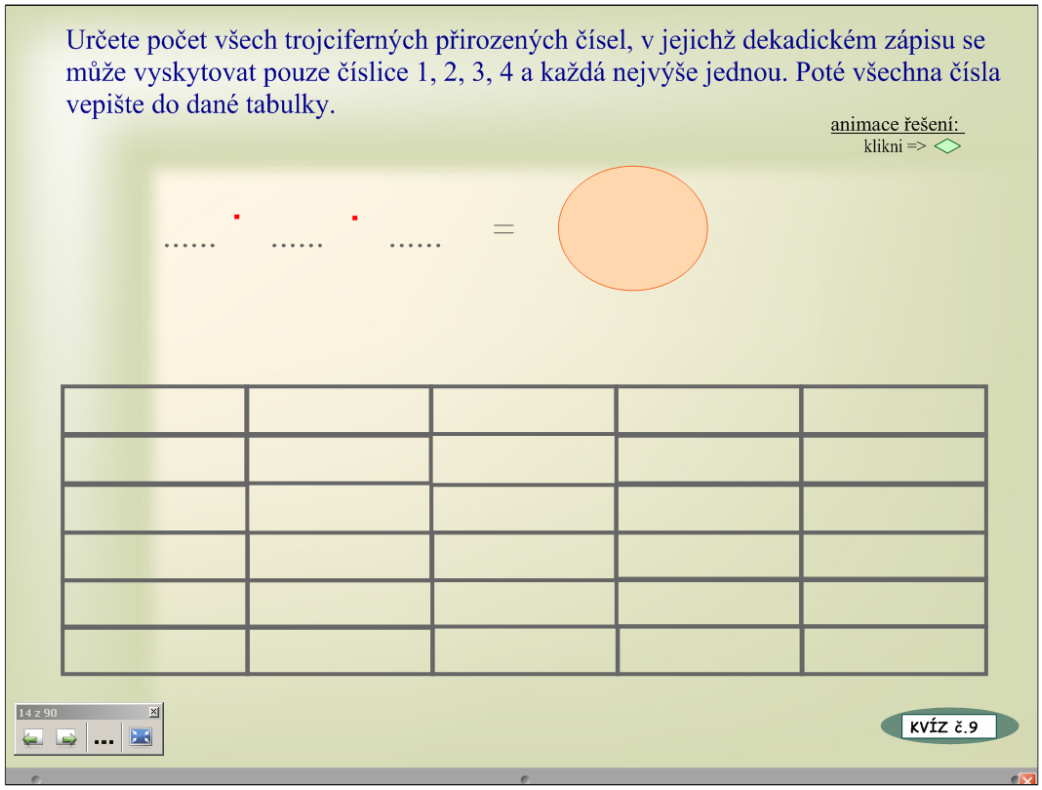
Kvíz č. 8 slouží k odreagování studentů jako v předchozích případech. Připravena je i úloha, jež s kvízem úzce souvisí:

„Celkové umístění na OH: 1. USA, 2. Austrálie, 3. Rusko, 4. Brazílie, 5. ČR, 6. Španělsko. Kolik by existovalo různých umístění již zmíněných šesti týmů (1 . – 6. místo), kdyby:

a) hráčky ČR získaly zlatou medaili a tým z Austrálie (díky slušivým dresům) medaili stříbrnou? [*4 x 3 x 2 = 24 možností*]

b) naše hráčky získaly jednu ze tří medailí?“ [*3 x 5 x 4 x 3 x 2 = 360 možností*]

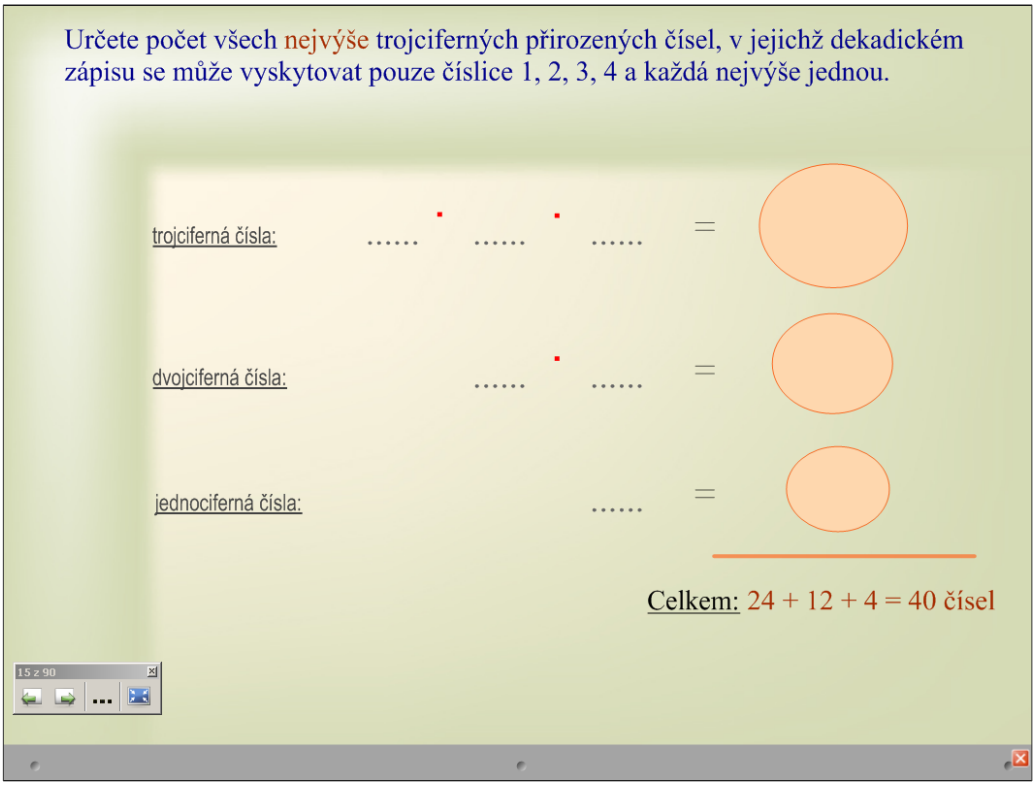
14. šablona



Tento příklad studenti nejprve řeší podle kombinatorického pravidla součinu. Tečkované úsečky znázorňují pozici v trojciferném čísle, kam se postupně zapíší všechny možnosti. Tzn. na pozici setin patří číslo 4, neboť na místo setin vybíráme ze čtyř možných číslic. Na pozici desítek už vybíráme pouze ze tří čísel a na třetí pozici už pouze ze dvou, tj. $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ různých čísel. Správná odpověď se může zapsat do oranžového pole.

Správnost odpovědi lze ověřit vypsáním všech možností do připravené tabulky a současně tak ukázat, že vypisování všech možností většinou není nejlepší způsob řešení (velmi zdlouhavé, možnost chyb). Pro slabší studenty je opět připravena animace řešení, stačí kliknout na zelený kosočtverec.

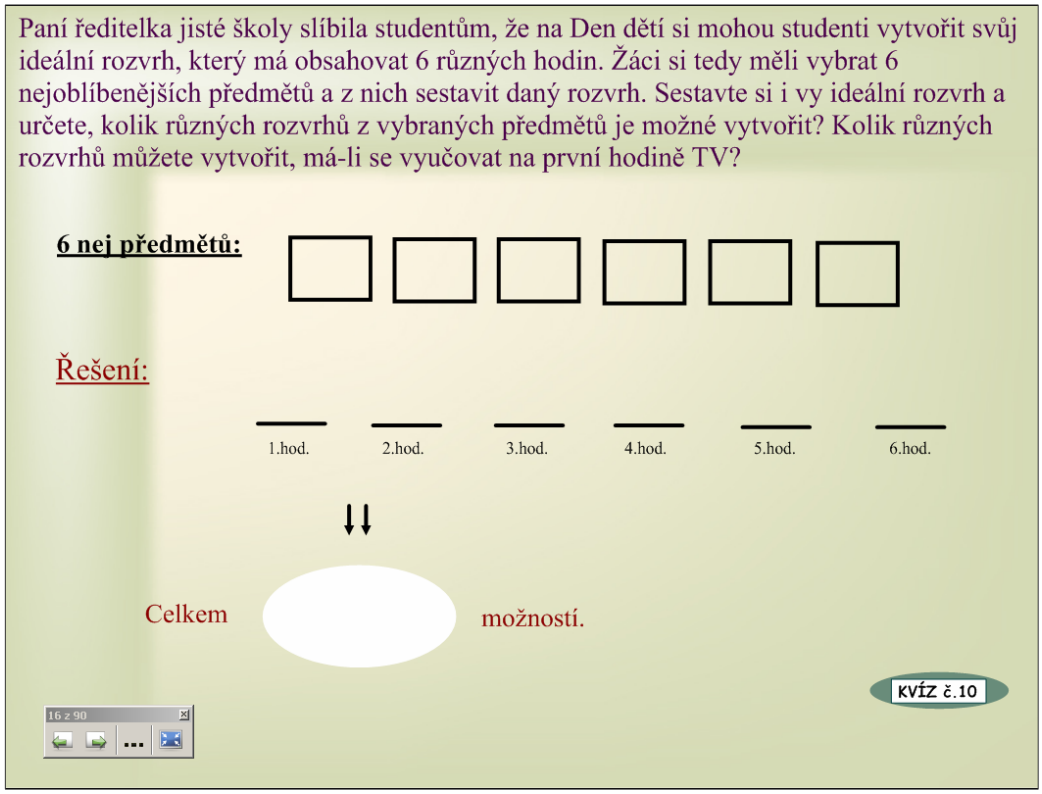
15. šablona



Tento příklad navazuje na předchozí. Využijí se obě kombinatorická pravidla, na což by měl učitel upozornit. Po vyřešení je studentům vhodné položit otázku, jak a jaké kombinatorické pravidlo bylo při výpočtu použito. Příklad se řeší postupným odkrýváním stínítka a dosazováním do připravených políček.

Prvním úspěšným krokem ke správnému řešení je důležité si zadání důkladně přečíst a porozumět mu.

16. šablona



Studenti si vyberou 6 nejoblíbenějších předmětů a z nich sestaví rozvrh na jeden den. Dané předměty zapíší do připravených obdélníčků a následně příklad řeší. Nad úsečky představující hodinu výuky se zapíší všechny možnosti výběru a do bílého pole pak správná odpověď (720 různých rozvrhů). Bude-li se však vyučovat na první hodině tělesná výchova (předpokládám, že studenti mezi 6 nejoblíbenějších předmětů zařadí právě tělesnou výchovu) – omezující podmínka, všech možných rozvrhů bude 120.

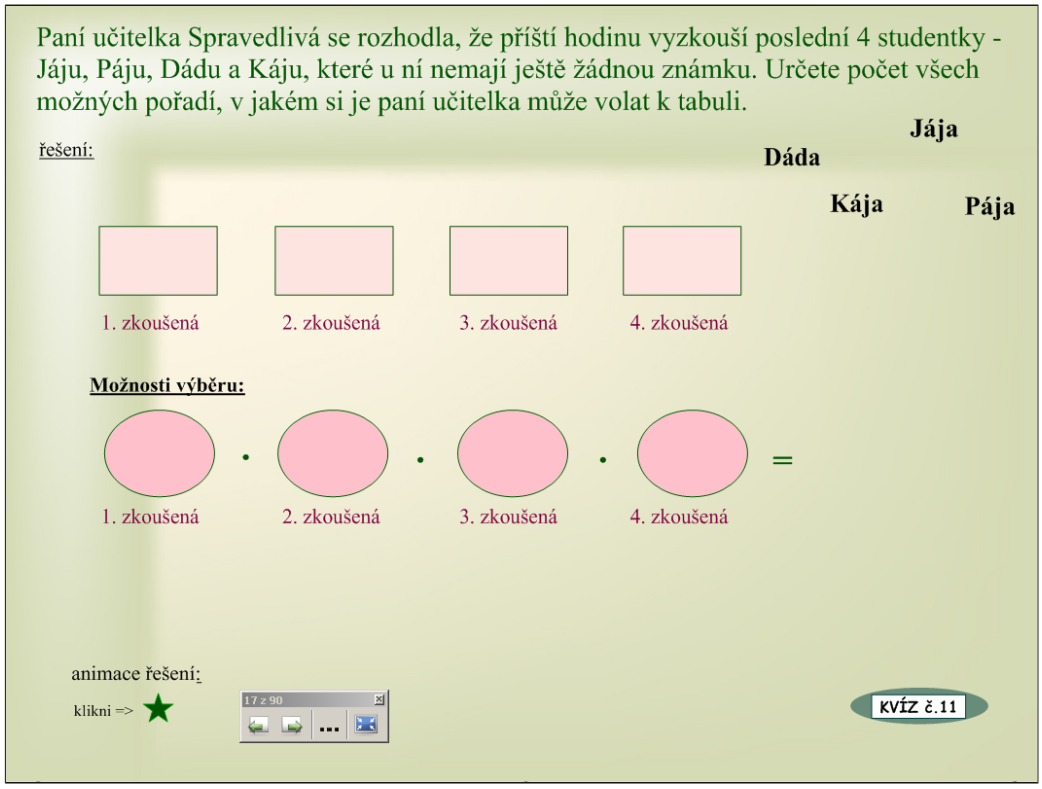
Kvíz č. 10 reaguje na Mezinárodní den dětí a je obohacen o jednu zábavnou úlohu.
„Pro děti jsou připraveny různé společenské a sportovní akce, např.

- *prolézání pavučinou,*
- *chůze na „chůdách“,*
- *spouštění kuličky do láhve,*
- *střelba ze vzduchovky,*
- *skákání v pytli,*
- *hod na cíl.*

Anička by ráda obešla všechna stanoviště, přičemž skákat v pytli chce naposled a spouštět kuličku do láhve by chtěla těsně před hodem na cíl. Kolik existuje možností, jak obejít všechna stanoviště?“ [*4 x 3 x 2 x 1 = 24 možností*]

Na dané šabloně si studenti mohou názorně postup řešení ukázat – s jednotlivými zkratkami představujícími daná stanoviště se dá pohybovat.

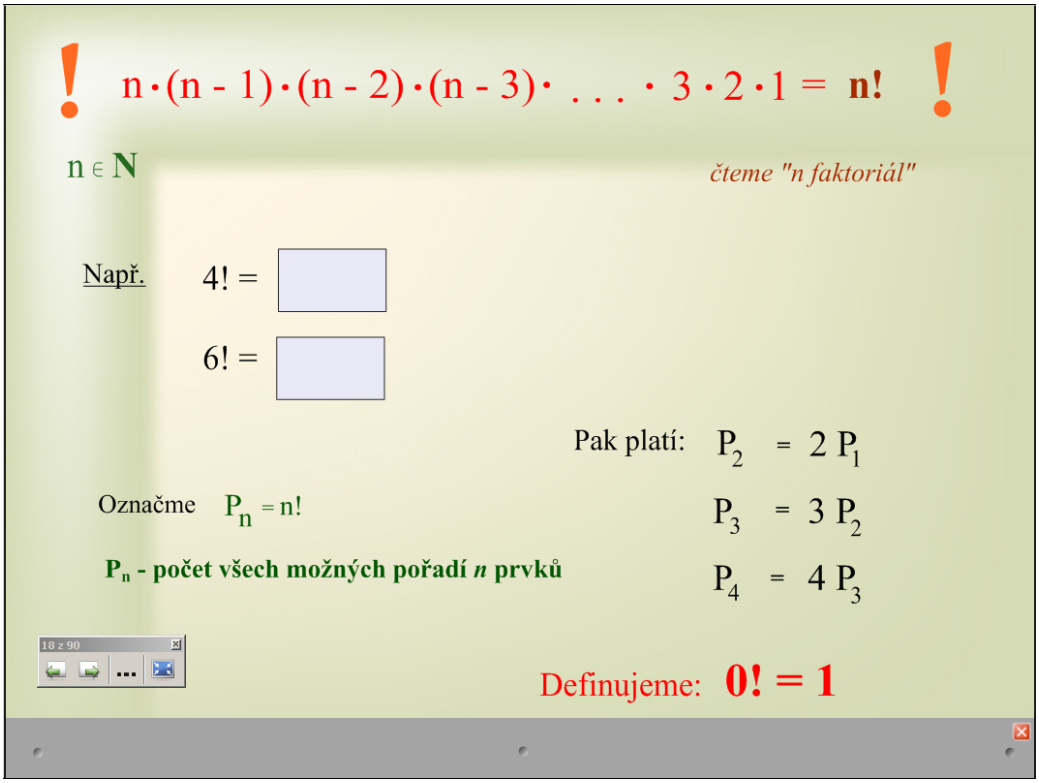
17. šablona



Tímto a předchozími příklady se připravujeme na zavedení pojmu $n!$, které nám do velké míry usnadní a zjednoduší výpočty.

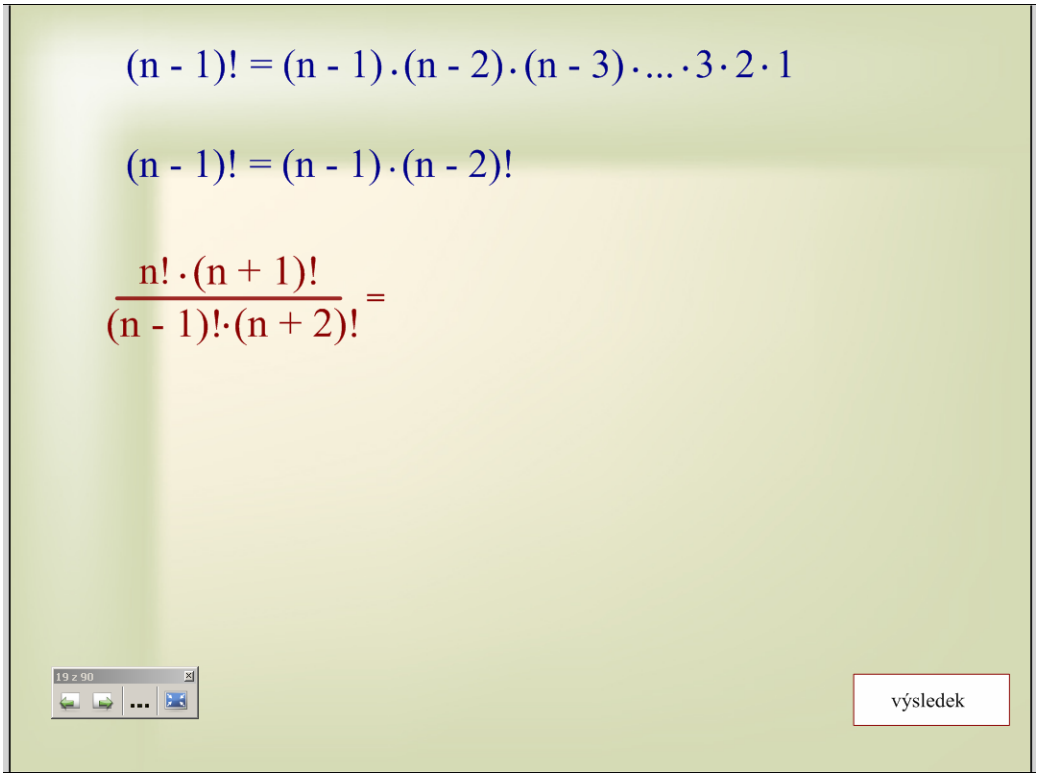
Do připravených obdélníčků se postupně vkládají jednotlivá jména (studentky) a během řešení se mohou možnosti výběru zapisovat do růžově vybarvených elips. S tímto příkladem by už studenti neměli mít žádné problémy. Vyskytnou-li se však přesto takoví jedinci, lze využít připravenou animaci (zelená hvězdička v levé dolní části).

18. šablona



Dostáváme se k pojmu $n!$. Studenti mohou vypočítat 4!; 6! a zapsat do obdélníčku. Jak už bylo na začátku příručky řečeno, studentům se předem neprozradí žádné pojmy, tedy v našem případě ani pojem permutace. Stačí definovat, že $n!$ vyjadřuje počet všech možných pořadí z n prvků (jiné ozn. P_n). Je velmi vhodné část stránky si zakrýt a postupně ji odkrývat.

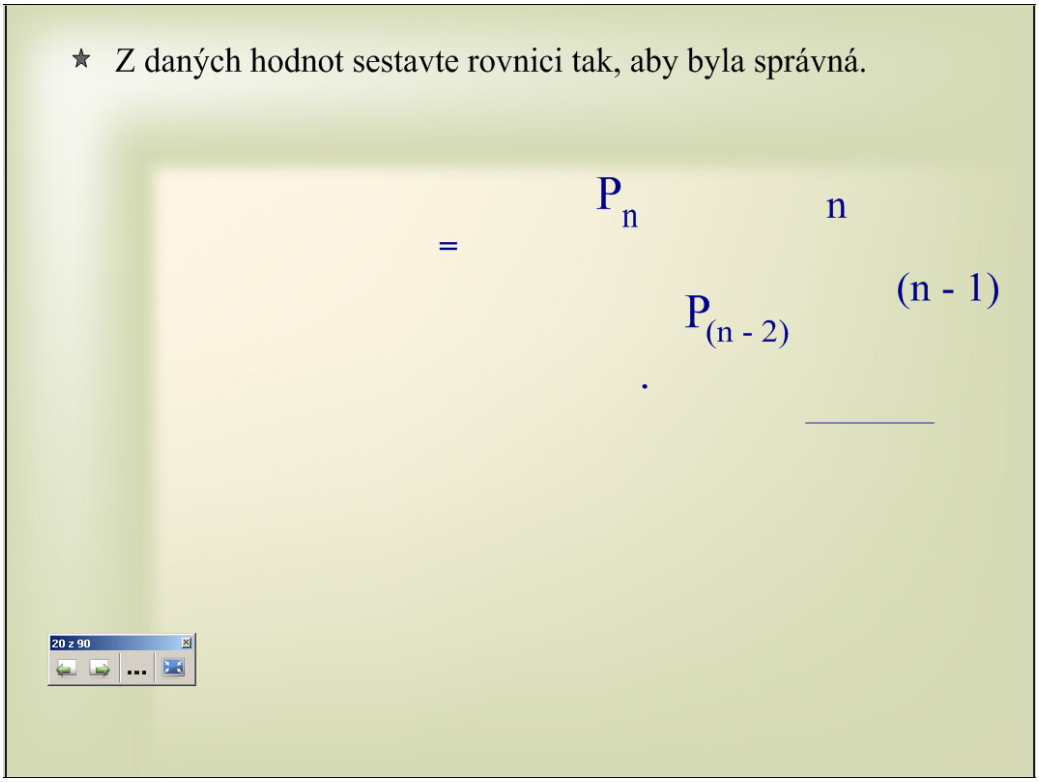
19. šablona



Velmi často se stává, že studenti nemají problém pracovat, resp. počítat s čísly, ale dostanou-li stejný příklad, jenž je však zapsán obecně, tzn. pomocí písmen - dochází často ke „kolizi“.

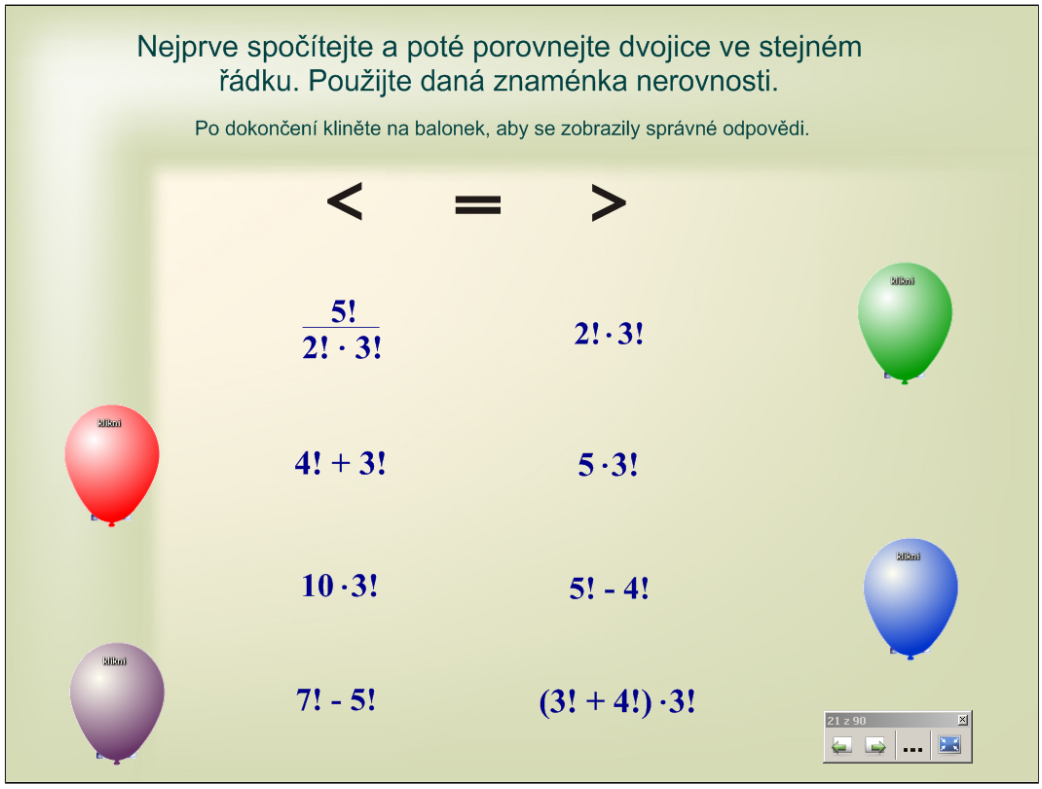
Proto je vhodné tento příklad probrat společně, pomalu a krok po kroku zapisovat na tabuli. Vpravo dole je ukryto správné řešení, stačí obdélníček posunout.

20. šablona



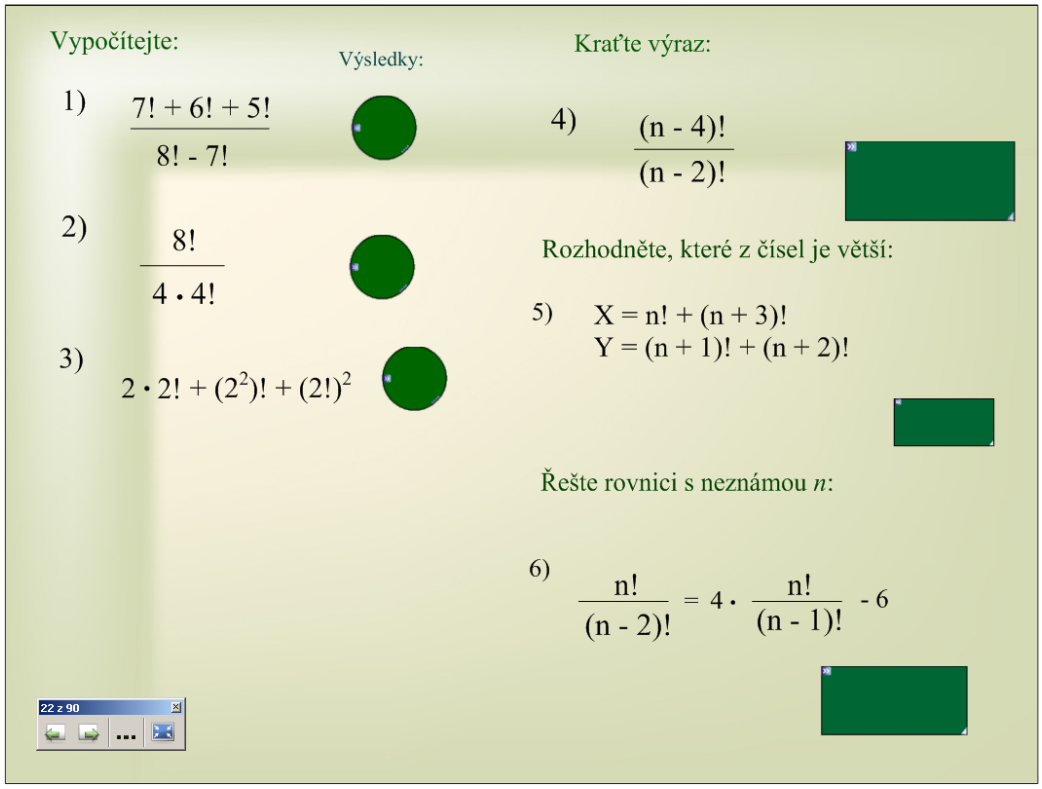
Se všemi čísly a operátory se dá pohybovat. Cílem, jak už napovídá zadání, je poskládat rovnici tak, aby se jednalo o pravdivé tvrzení.

21. šablona



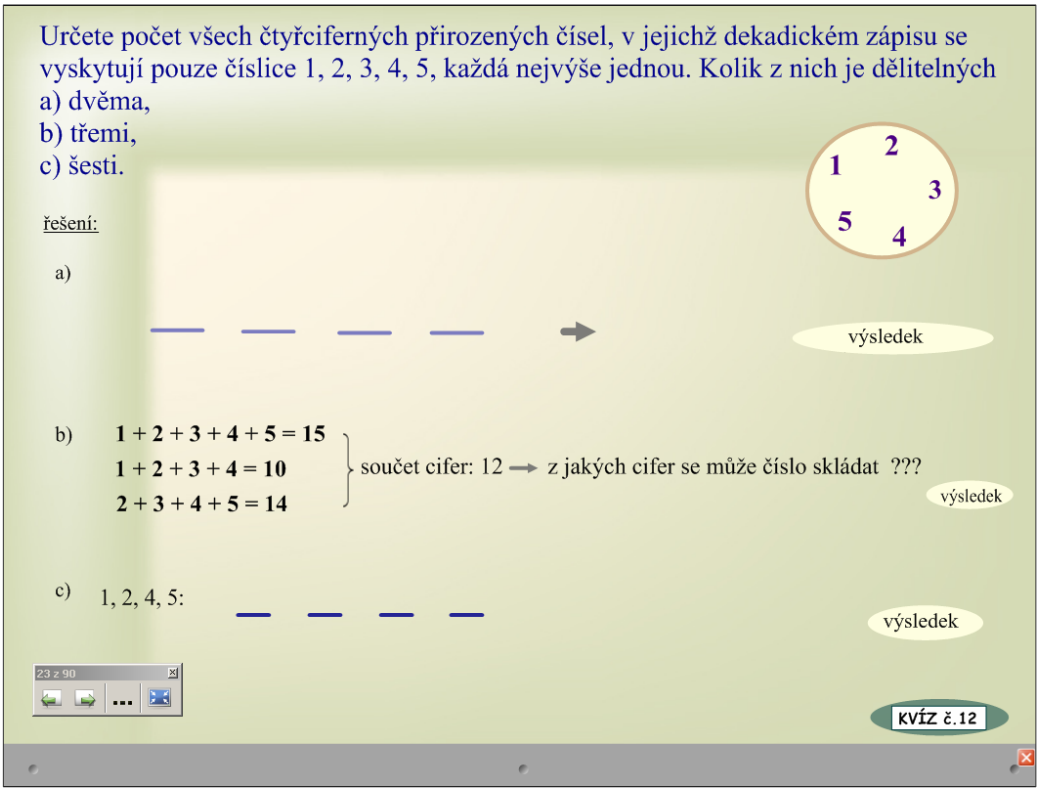
Studenti mají vypočítat jednotlivé výrazy a pak ke každé dvojici v řádku přiřadit správné znaménko relace, u kterých je použit „nekonečný klonovač“, tzn. každé znaménko (nerovnost, rovnost) je možné použít nekonečně mnohokrát. Pod balónky je skryta správná odpověď – stačí na ně klepnout.

22. šablona



Šablona č. 22 představuje jakousi sbírku 6 úloh, u kterých pod zelenými kruhy a obdélníky jsou schovány správné odpovědi. Stačí pouze na daný geometrický útvar poklepat.

23. šablona

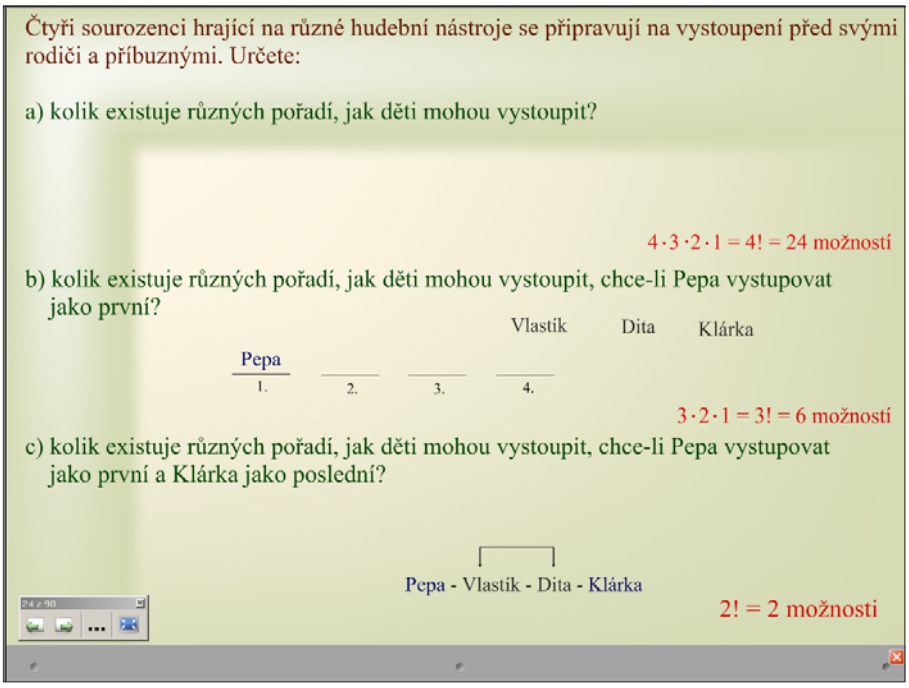


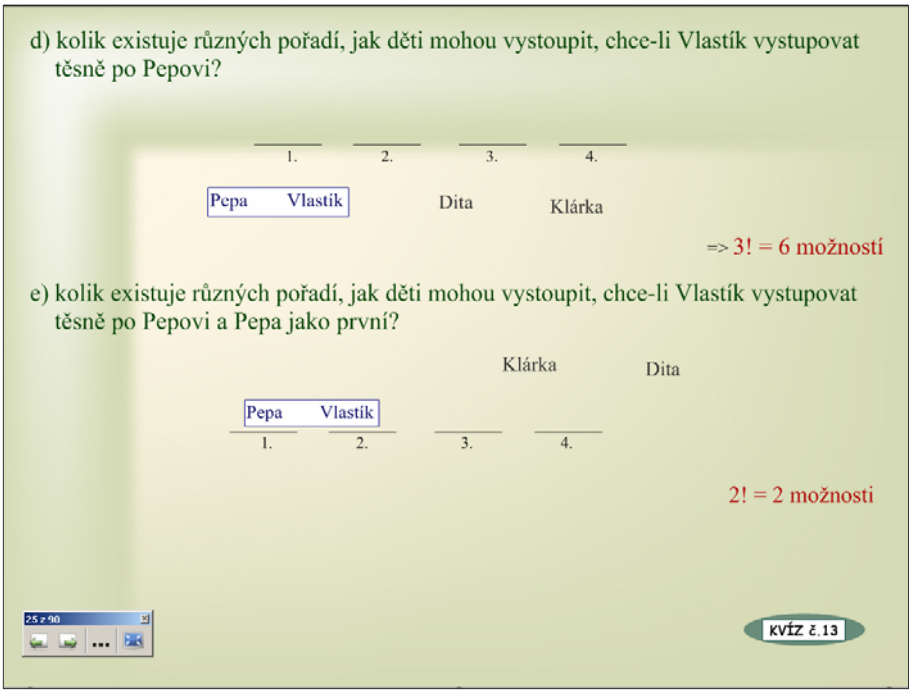
Jedná se o příklad, který je rozdělen na tři, resp. čtyři části, přičemž ta první je nejsnazší. Mezi zadanými ciframi se neobjevuje nula, což podstatně ulehčí výpočet. Domnívám se, že zde není nutná žádná animace řešení. Stačí mít znázorněny jednotlivé pozice ve čtyřciferném čísle – viz šablona. Číslice v kruhu vpravo nahoře nejsou pevně umístěné, a tudíž lze s nimi pohybovat, vkládat na jednotlivé pozice.

Správné výsledky skryté v pravé části šablony (stačí posunout bílým polem) jsou:

a) $2 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2) = 48$
b) $4!$
c) $2 \cdot 3!$

24. šablona,
25. šablona

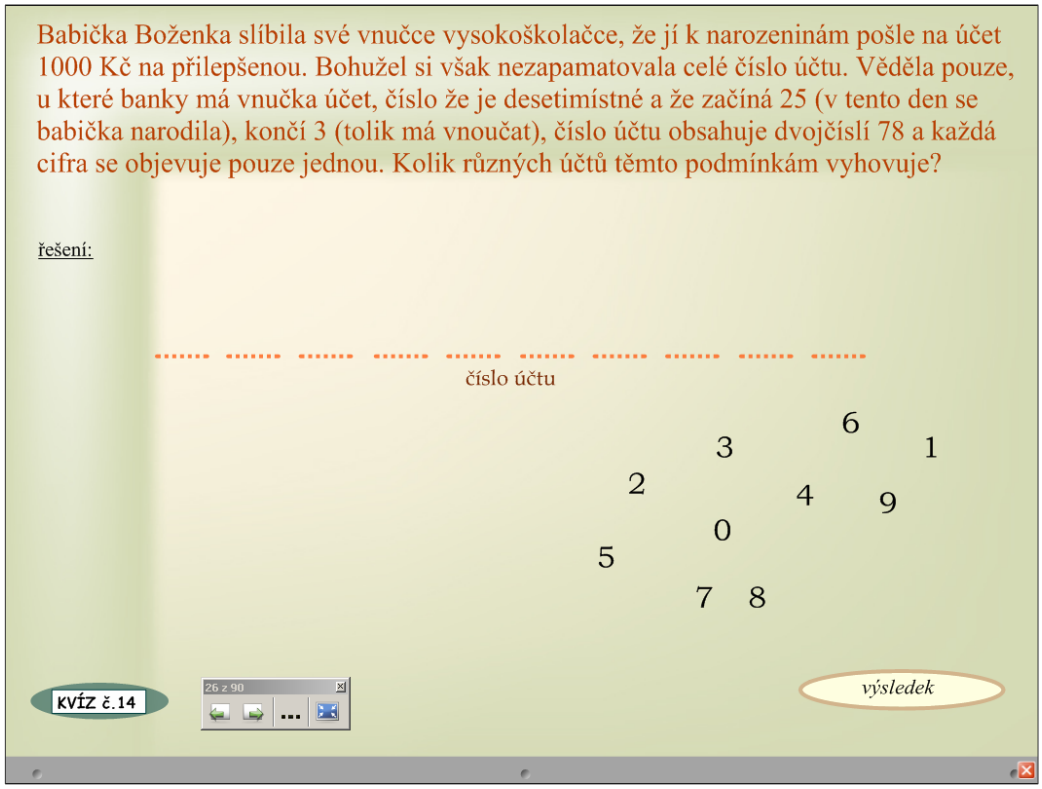




Příklad specifikovaný v obou těchto šablonách je zaměřen na určení všech možných pořadí čtyř sourozenců, jsou-li dány určité omezující podmínky. Je vhodné využít připravenou „roletku“ a pro názornost řešení s jednotlivými jmény pohybovat a přiřazovat je k jednotlivým pozicím.

U kvízu č. 13 se nachází snadná kombinatorická otázka: „*Kolik existuje všech možností, jak všech šest názvů přiřadit k šesti obrázkům?*“ [6!]

26. šablona

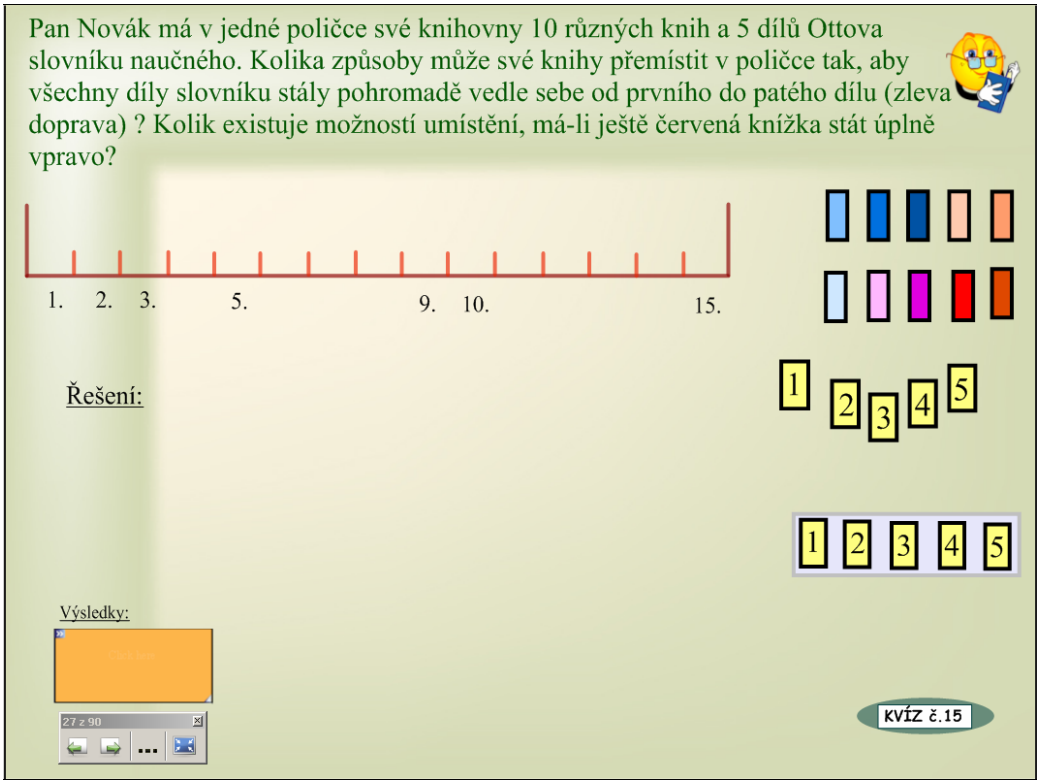


Babička si sice nepamatuje celé číslo účtu, ale pouze několik jeho částí. Pokud se studenti nad tímto zadáním pousmějí, dokazují, že jsou na příklad soustředěni a připravení k jeho řešení. Pro usnadnění výpočtu lze jednotlivými číslicemi hýbat. Studenti tak mohou do čísla účtu vložit všechny cifry, které si babička pamatuje a poté příklad snadno vyřešit.

V tomto případě se kvíz o Boženě Němcové přímo nabízí. Úzce na něj navazuje ještě jedna triviální úloha následujícího znění:
„Babička chodí každý týden se svojí vnučkou do divadla a jako každá žena i ona chce být velká „fešanda“. Její šatník obsahuje 3 různé společenské šaty, 3 sukně a 5 halenek. Kolikrát může jít babička s vnučkou do divadla, chce-li být pokaždé jinak oblečená?“
Výsledek $3 + 3 \cdot 5 = 18$ je schován pod růžovým obdélník (jedenkrát kliknout). Jedná se o jednoduchou úlohu, aby i slabší studenti byli schopni příklad vyřešit a tím se motivovat k další činnosti.

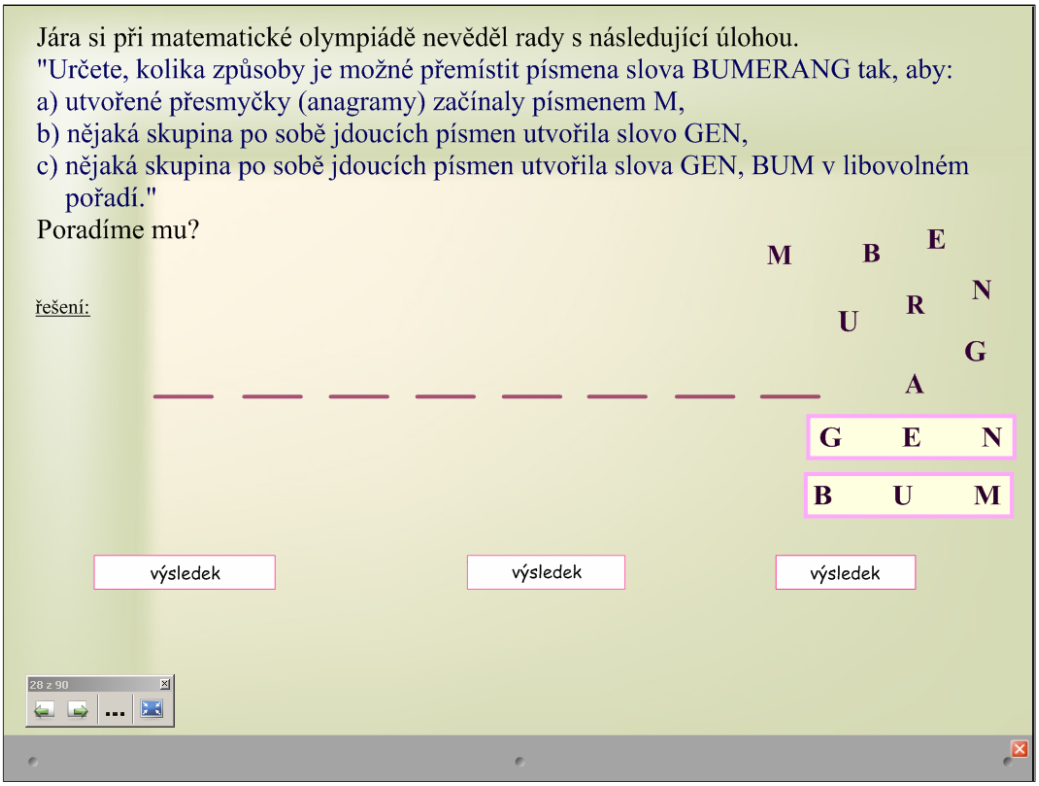
Na závěr je vhodné studentům položit otázku, jakou spojkou lze nahradit ve výsledku znaménko součtu (*nebo!!!*).

27. šablona



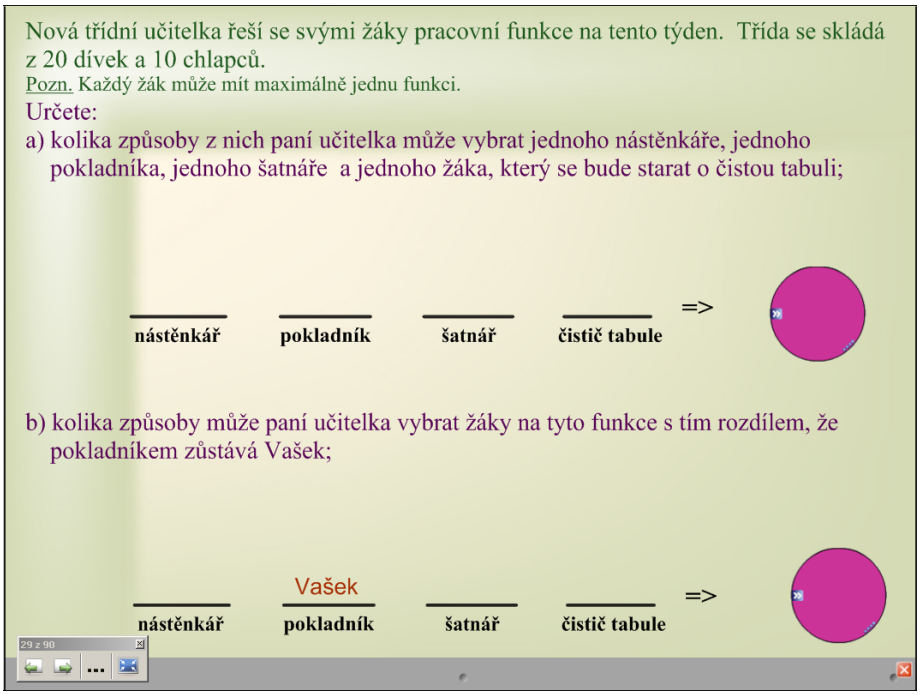
Příklad je zaměřen na určení všech možných pořadí různých objektů, v našem případě knih. Připravená polička je umístěna napevno, zatímco s různě barevnými knihami (barevné obdélníky a 5 očíslovaných obdélníků představující 5 dílů Ottova slovníku naučného - v pravé části šablony) lze pohybovat. Vzhledem k tomu, že díly Ottova slovníku mají stát pohromadě od prvního do pátého dílu zleva, je na šabloně vytvořena i pětice knih, se kterou se dá hýbat. Výsledky se nachází v levém dolním roku – stačí kliknout.

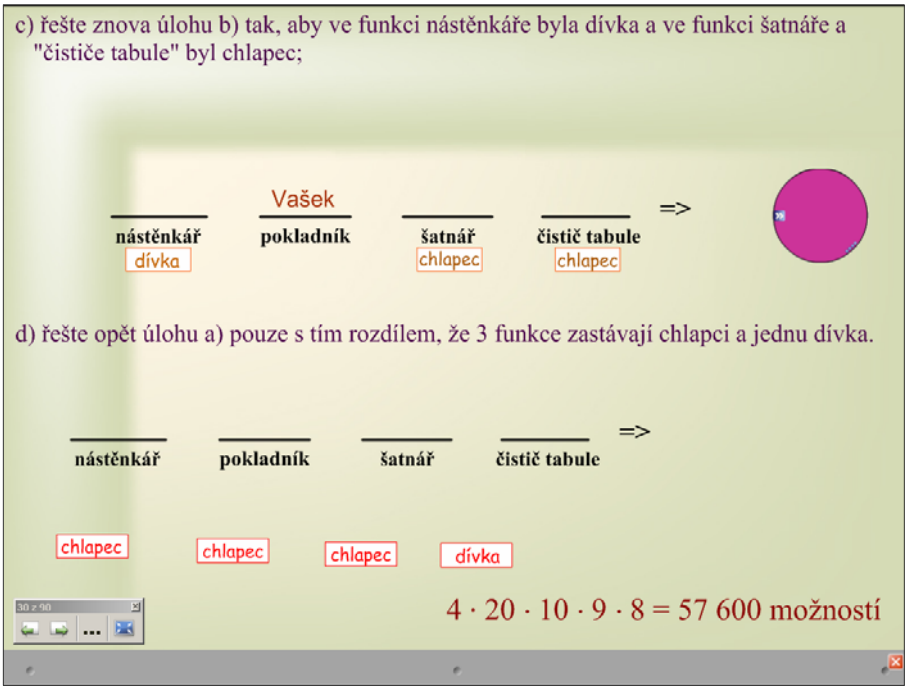
28. šablona



Opět příklad na procvičení základních kombinatorických pravidel - součtu a součinu. Příklad není složitý a většina studentů by ho měla bez větších problémů zvládnout. Šablona je připravena tak, že si studenti mohou část řešení demonstrovat, s jednotlivými písmeny či skupinami písmen lze pohybovat. Výsledky jsou schovány pod obdélníky.

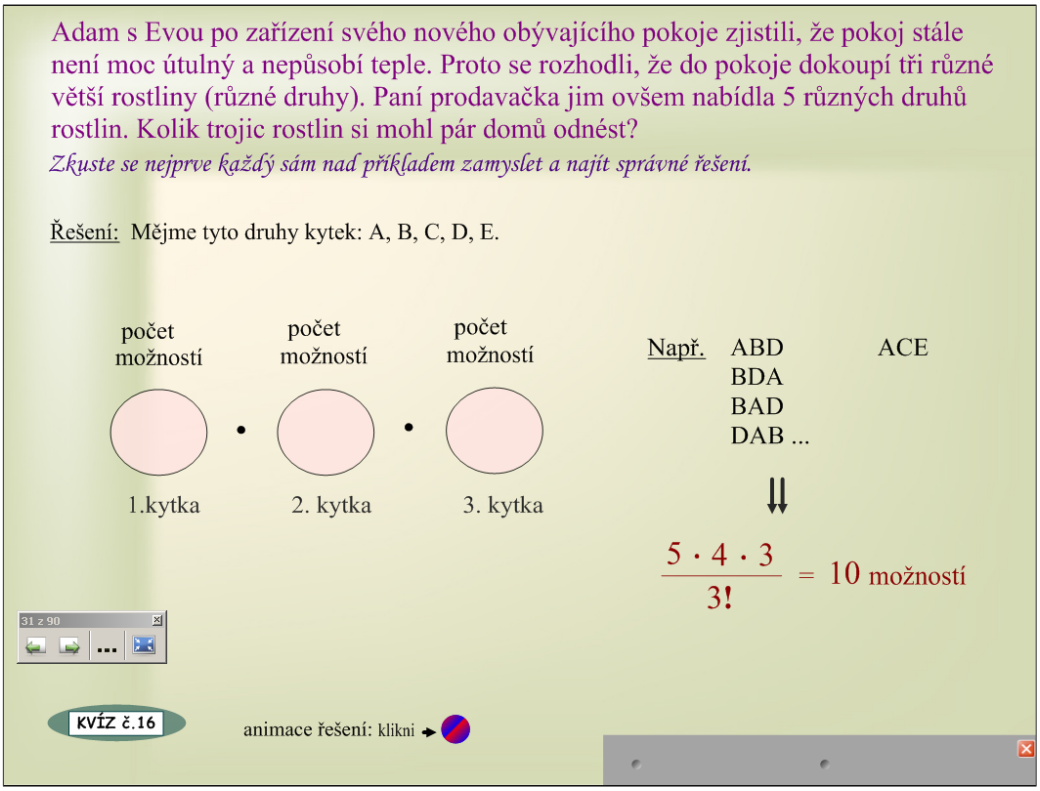
29. šablona
30. šablona





Jednoduchý příklad, aby se mohli zapojit i slabší studenti Speciální „roletkou“ je možné zakrýt vše kromě zadání a pod jednotlivými růžovými kruhy jsou schované odpovědi – stačí kliknout. U zadání d) je pro lepší názornost možné hýbat i s bílými obdélníky červeně ohraničenými.

31. šablona



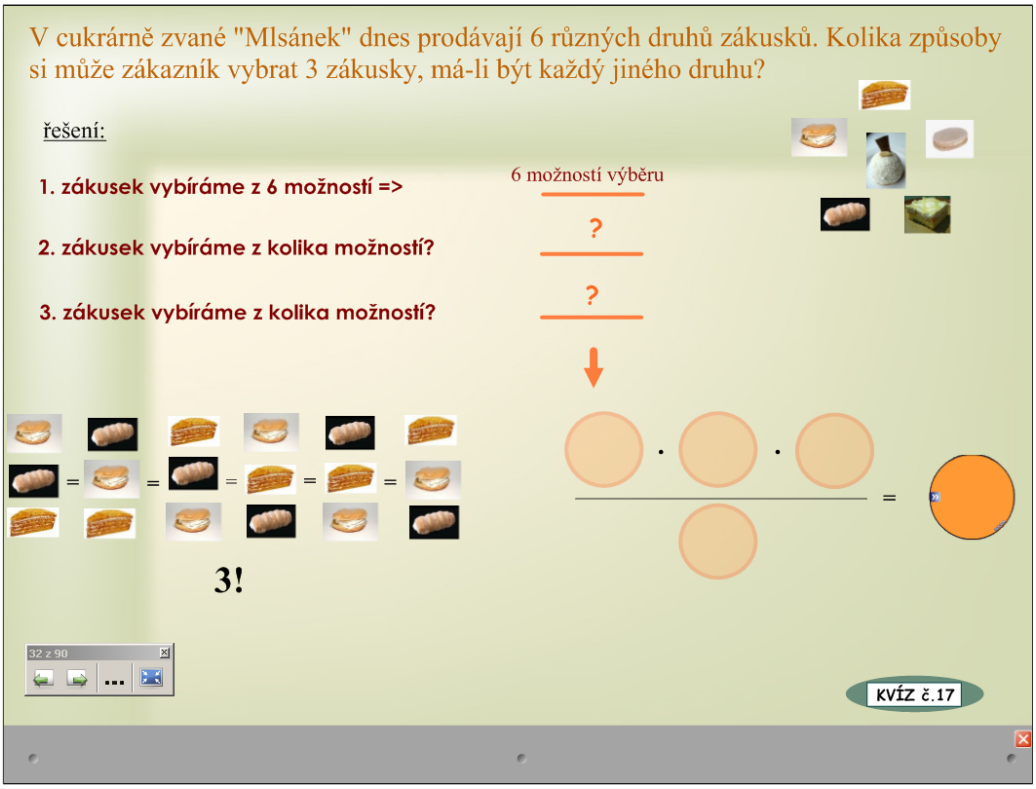
V této fázi procvičování by studenti neměli mít téměř žádné problémy s řešením úloh, kde se prvky nemohou opakovat a kde nám záleží na pořadí vybíraných prvků. Dostáváme se tak k zavádění kombinačních čísel. Tento příklad je podobný všem předchozím pouze s tím rozdílem, že zde nezáleží na pořadí vybíraných prvků, resp. rostlin. Pro zjednodušení a pochopení je připravena animace řešení a pro odreagování kvíz č. 16. Před přečtením zadání je nutné zakrýt řešení na pravé straně šablony. Žáci nebudou tuto úlohu považovat za složitou, a jejich odpověď bude mít nejspíš tvar: 5 · 4 · 3 = 60, což je samozřejmě chybný výsledek. Jednotlivé možnosti se mohou napsat do vyznačených růžových ploch. Při postupném odkrývání textu schovaného stínítkem je nyní řada na vyučujícím, aby úlohu srozumitelně a jasně vysvětlil (s využitím animace řešení či bez).

U kvízu č. 16 je připravena i následující kombinatorická úloha:
„Květinářka má svázat kytici, jež má obsahovat tři růže. K dispozici má růže v barvách – bílé, růžové, červené, vínové a žluté – a od každé barvy po jedné růži. Kolik různých kytic může květinářka vytvořit?“
Odpovědi mohou být dvě. Pokud nebudeme rozlišovat umístění v kytici a půjde nám pouze o výběr tří růží, je výsledkem

$$\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!} = 10 \text{ různých kytic.}$$

V případě rozlišení pozic v květině je výsledkem součin $5\cdot 4\cdot 3 = 60$. Učitel by měl na obě varianty upozornit.
U kvízu je v levém dolním roku schován i příklad (ikona s textem: Řešte každý sám), který se studentům může zadat ve formě samostatné práce.

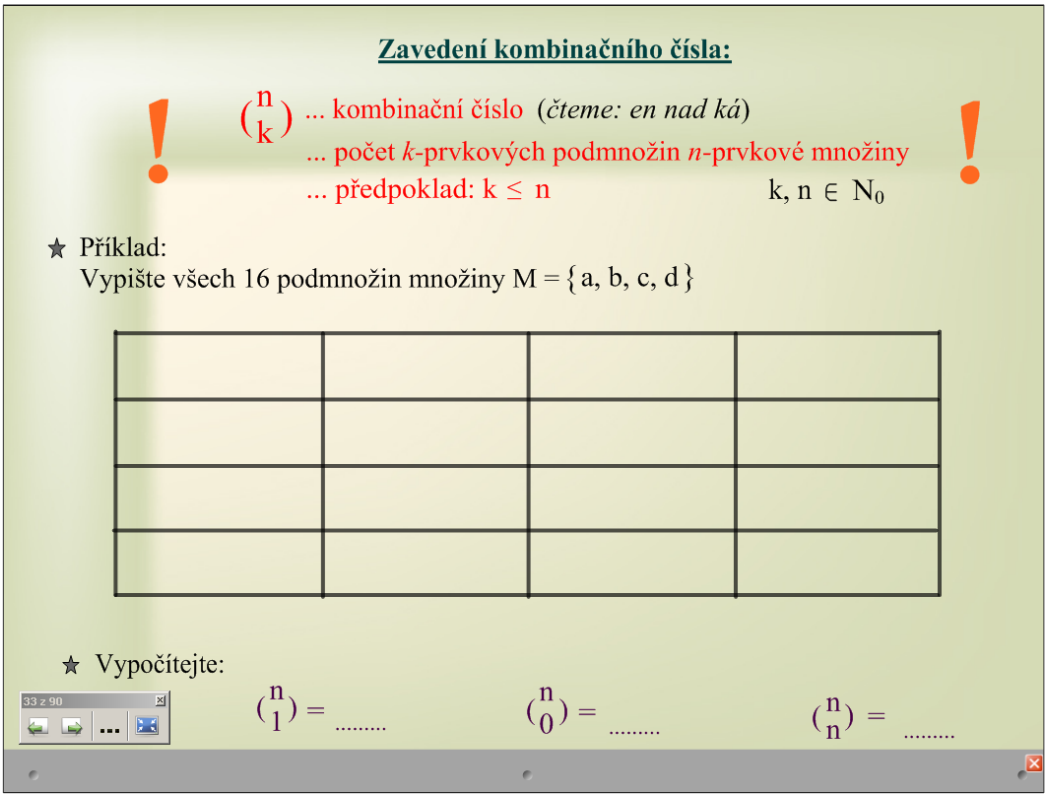
32. šablona



Toto zadání je vloženo záměrně, přestože je velmi podobné předchozímu. Smyslem příkladu je nutnost uvědomit si určité zákonitosti výběru.

Je vytvořen obrázek, se kterým není možné pohybovat, pouze lze vepsat jednotlivé možnosti do připravených kroužků, přičemž za rovnítkem po kliknutí na oranžový kruh se ukáže konečný výsledek.

33. šablona



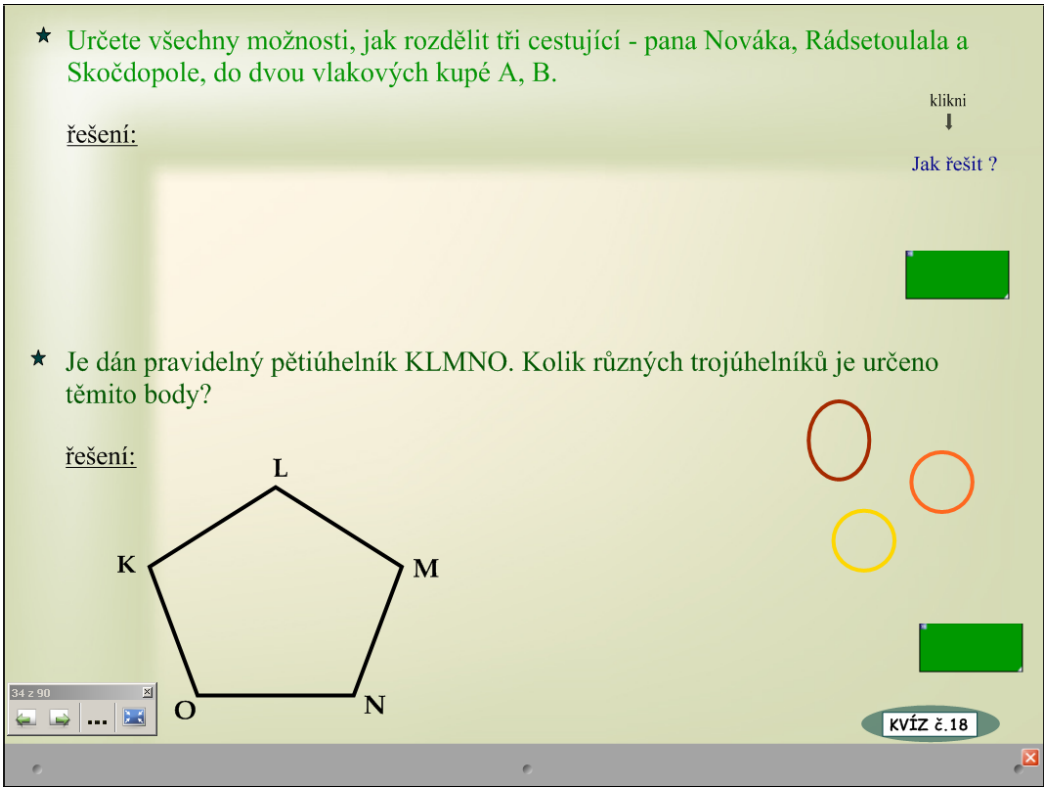
Pro ulehčení dalšího zapisování výpočtů zavedeme kombinačního čísla. Toto číslo $\binom{n}{k}$ nám bude určovat počet *k*-prvkových podmnožin *n*-prvkové množiny. Je ovšem nutné si ověřit, zda studenti množiny chápou a zda ví, že v množině se prvky nemohou opakovat a nezáleží ani na jejich pořadí.
Nejprve si studenti všechny podmnožiny čtyř prvkové množiny zapíší do přiložené tabulky a pak určí, čemu se rovnají kombinační čísla $\binom{n}{1}, \binom{n}{0}, \binom{n}{n}$. Tím, že se studentům nepředloží výsledky uvedených vztahů, budou schopni kdykoliv si je odvodit.

$\binom{n}{1} = n$ … počet všech jednoprvkových podmnožin *n*-prvkové množiny

$\binom{n}{0} = 1$ … počet všech 0-prvkových podmnožin *n*-prvkové množiny

$\binom{n}{n} = 1$ … počet všech *n*-prvkových podmnožin *n*-prvkové množiny

34. šablona



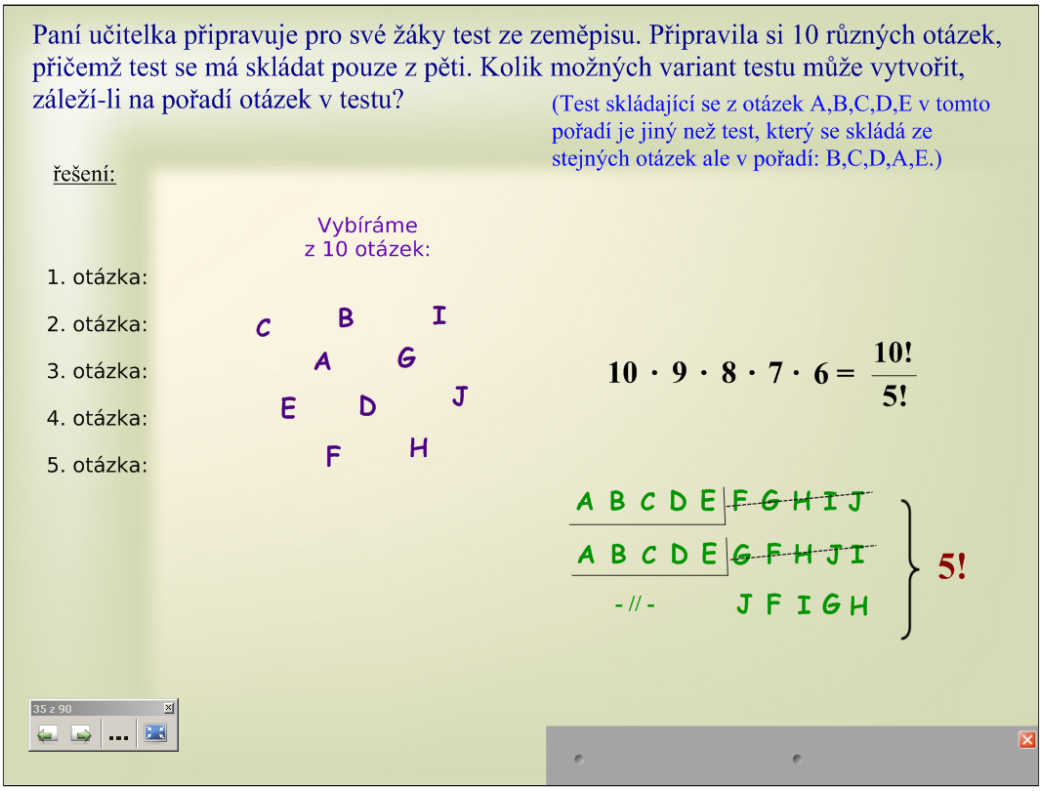
Oba dva příklady této šablony jsou zaměřeny na určení počet všech možných podmnožin.

Zadáním prvního je rozdělit tři cestující do dvou různých vlakových kupé. Stačí určit osoby v jednom kupé, tj. všechny možné podmnožiny; obsazení druhého kupé je automaticky daná. Pokud se najdou studenti, kterým to není úplně jasné, je možné využít připraveného obrázku (kliknout na otázku v pravé části nahoře „Jak řešit?“), který vše srozumitelně popisuje a vysvětluje. Obrázek lze standardně vypnout pomocí křížku v pravém horním rohu. Správná odpověď: 8 možností.

U druhého příkladu si studenti musí uvědomit, že hledáme počet všech tříprvkových podmnožin pěti prvkové množiny. Dvěma kroužky a oválem můžeme označit vždy tři body trojúhelníku a ukázat si, že nezáleží na pořadí vybíraných prvků, neboť vždy dostaneme trojúhelník stejný. Správná odpověď: $\binom{5}{3} = 10$ různých trojúhelníků.

Pod zelenými obdélníky jsou schované správné výsledky a při řešení prvé úlohy je nutné stínítkem schovat úlohu druhou, aby neodpoutávala pozornost od zadání.

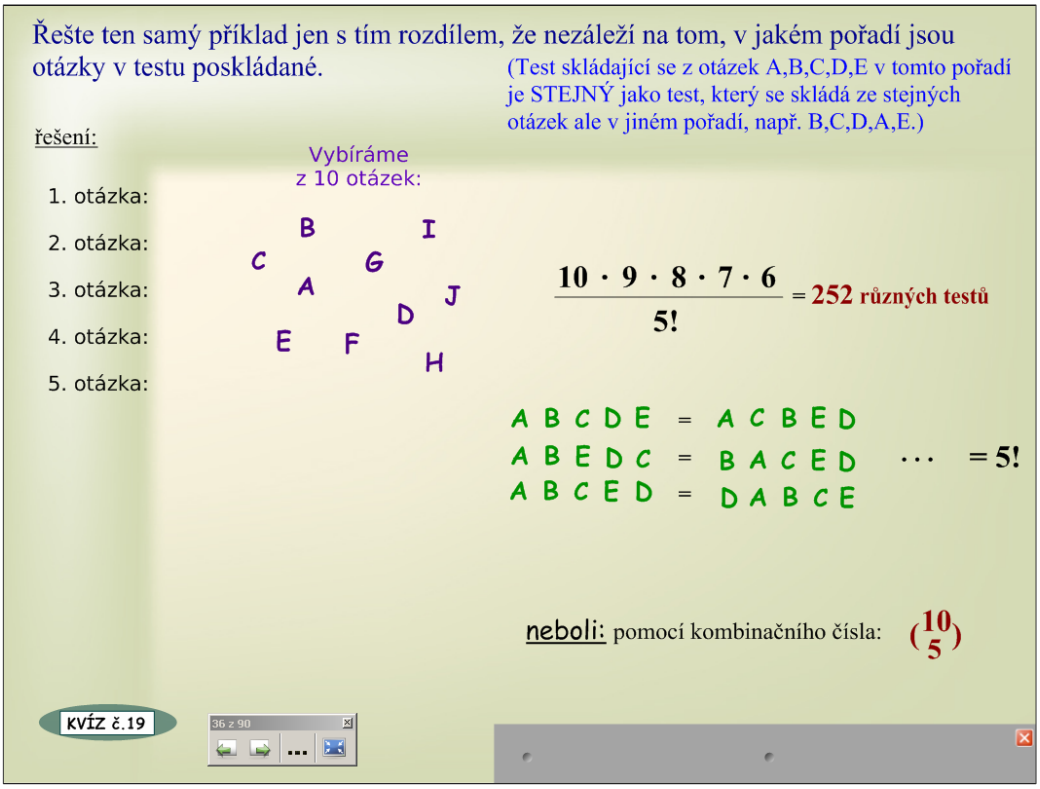
35. šablona



Tento a následující příklad ukazují rozdíly v řešeních, pokud budeme rozlišovat pořadí pěti vybraných otázek či nikoliv. Příklad 35. šablony rozlišuje pořadí otázek, tzn. všech možností bude daleko více než v následujícím případě.

Jednotlivá fialová písmena představují učitelkou připravené otázky, se kterými se dá manipulovat a přiřazovat k otázkám v levé části šablony. Pravá část by měla být ze začátku stínítkem skryta. K výsledku se dá dojít dvěma způsoby – pomocí kombinatorického pravidla součinu či pomocí čísla $n!$. Je vhodné obě varianty řešení ukázat a vysvětlit rozdíl.

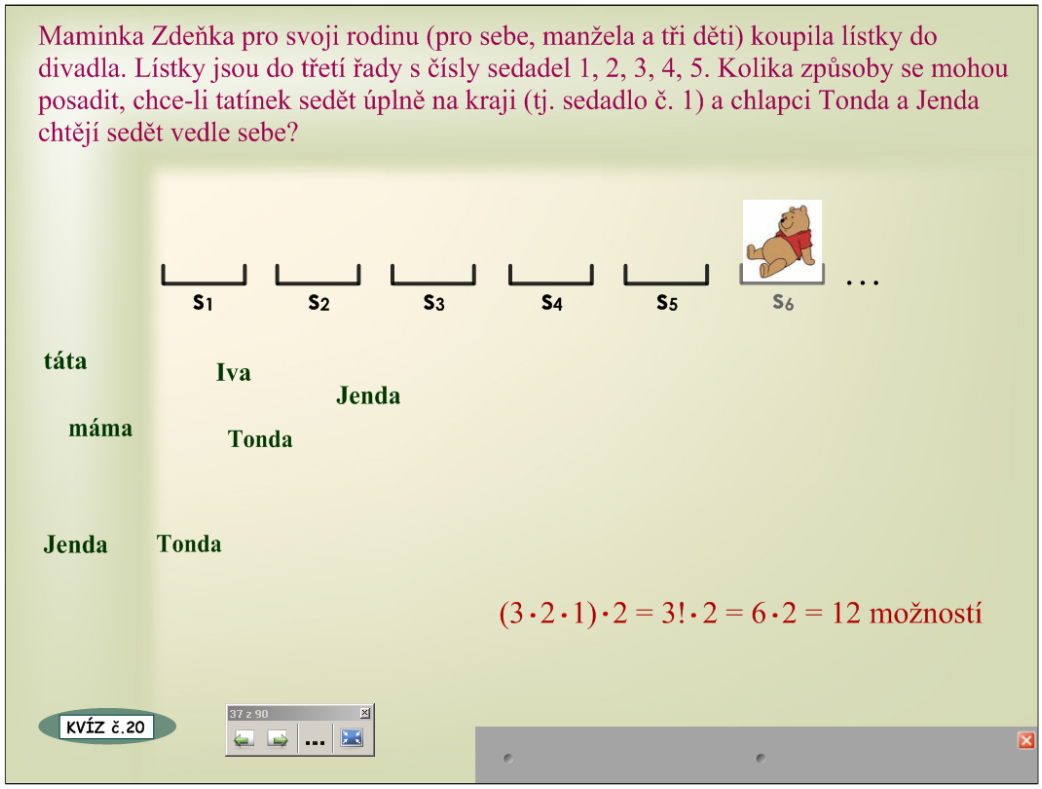
36. šablona



V tomto případě nezáleží na pořadí položených otázek, ale pouze na tom, jaké otázky vyskytují. Tedy výsledek z předchozí šablony stačí buď vydělit 5! či je možné výsledek zapsat pomocí kombinačního čísla. Oba způsoby studentům ukáží, jak lze přijít na výpočet kombinačního čísla.

Studentům se může začít zdát kombinatorika složitá, a proto je dobré si kvízem odpočinout. Kvíz je nejenom velmi zajímavý, ale i poučný. Jako samostatná práce může být použita i ke kvízu přiložená následující úloha:
„*Neznáme-li žádnou stavbu, kolik existuje všech možných výsledků přiřazení jednotlivých států a názvů staveb k deseti obrázkům?*“ (Výsledek: 10! · 10!)

37. šablona



V šabloně jsou sedačky umístěné napevno proti jménům, se kterými se dá pohybovat a posouvat k sedačkám.
Ke kvízu je přiložena snadná úloha následujícího znění:

Známé filmy s Vlastou Burianem:
- *Ducháček to zařídí (1938)*
- *U pokladny stál (1939)*
- *Přednosta stanice (1941)*
- *Tři vejce do skla (1937)*
- *To neznáte Hadimršku (1931)*
- *Byl jednou jeden král (1954)*

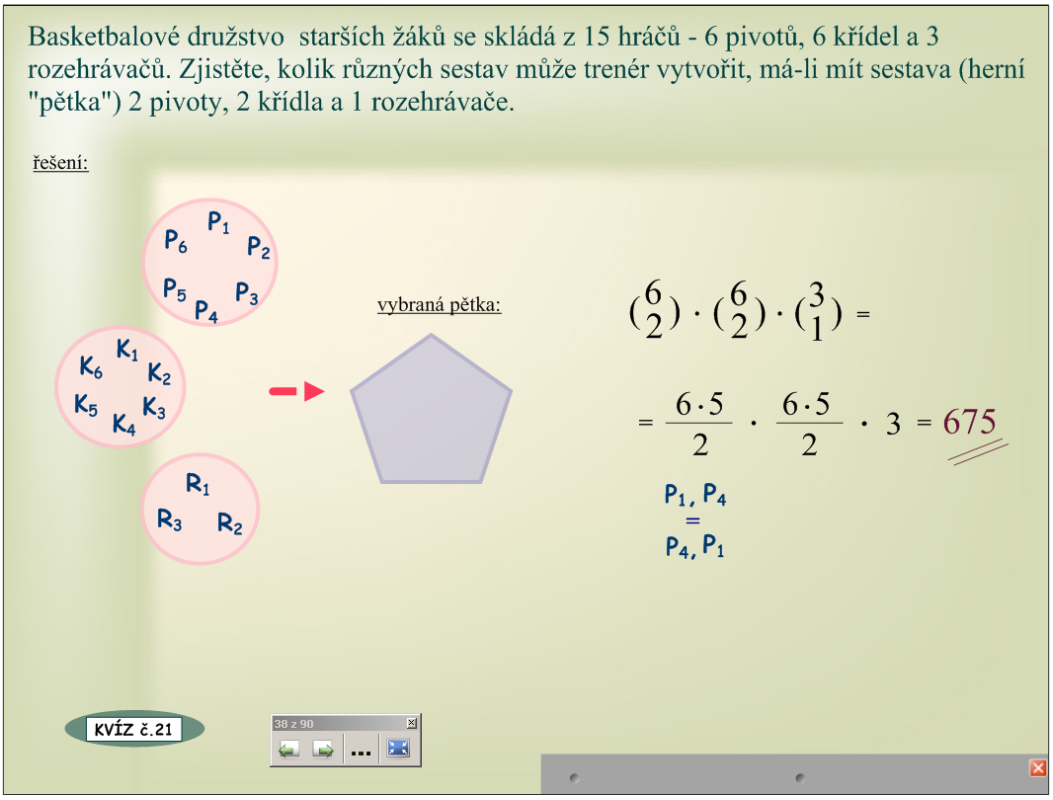
Z výše uvedeného seznamu filmů vybíráme dva různé tituly.

a) Kolik existuje všech možných dvojic?

b) Kolik existuje všech možných dvojic, požadujeme-li, aby vybraná dvojice obsahovala alespoň jeden film z 30. let 20. století?

Správné odpovědi: $\binom{6}{2} = 15$, $\binom{4}{1} \cdot 2 + \binom{4}{2} = 15 - 1 = 14$ jsou ukryty pod fialovými obdélníky.

38. šablona



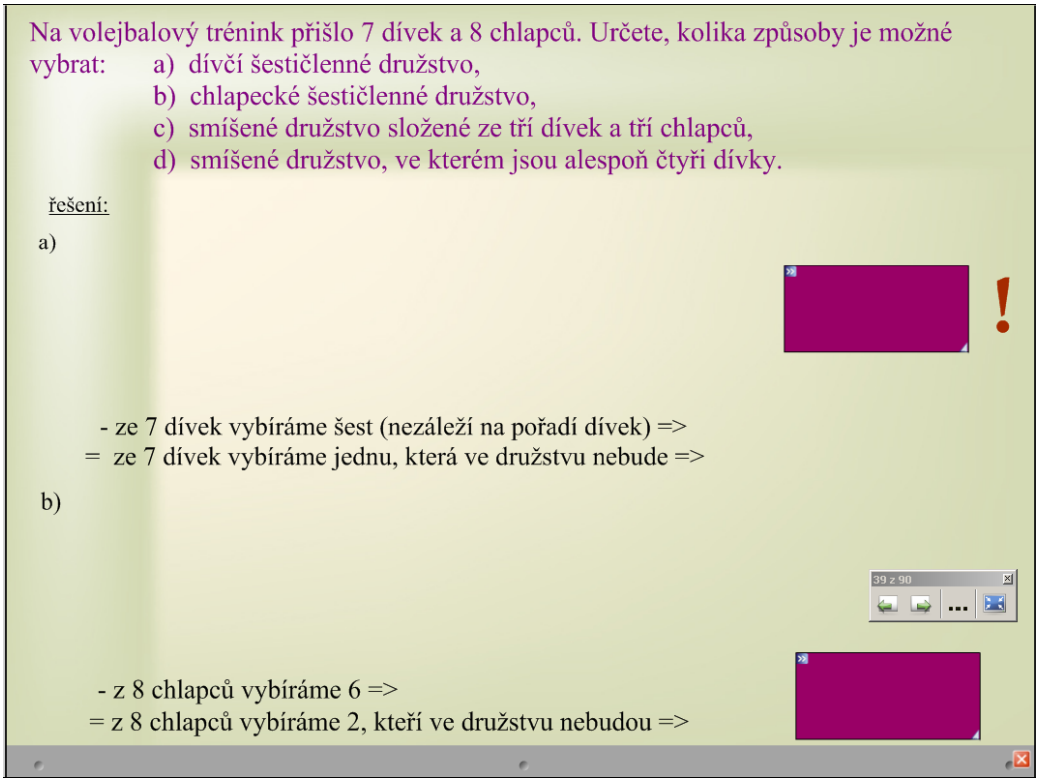
Typický příklad na kombinace bez opakování, kdy vybíráme určité hráče a nezáleží nám na pořadí. Řešení je buď pomocí kombinačních čísel nebo pomocí kombinatorického pravidla součinu. Zde je důležité, aby si studenti uvědomili opět obě řešení, neboť tím jsou neustále nevědomky seznamováni se vztahem mezi kombinačním číslem a n!. Označení P_1 až P_6, K_1 až K_6 a R_1 až R_3 představuje jednotlivé hráče, se kterými se dá pohybovat a vkládat do modrého pětiúhelníku, který charakterizuje vybranou pětici hráčů. Výsledky v pravé části musí být zprvu zakryty „roletkou“.
Kvíz této šablony bude svým charakterem bližší chlapcům, zpestřit hodinu by mohl ale všem. I u tohoto kvízu je přiložen jednoduchý příklad k zamyšlení – viz zadání níže:

„Dva kamarádi se šli podívat na hokejový zápas Pittsburgh versus Florida. Zápas skončil vítězně pro hráče z Floridy 5 : 3.

a) Kolik možných výsledků mohlo svítit na informativní tabuli na stadiónu po druhé třetině?
b) Kolik možných výsledků mohlo svítit na tabuli po druhé třetině, víme-li, že v první třetině hráči z Floridy vstřelili alespoň dva góly a Pittsburgh dal třetí gól ve třetině poslední?
c) Kolik možných výsledků mohlo na tabuli po 2. třetině svítit, víme-li, že nebyla remíza?

Výsledky: $6 \cdot 4 = 24$, $4 \cdot 3 = 12$, $(4 \cdot 3) + (2 \cdot 4) = 20 = 24 - 4$

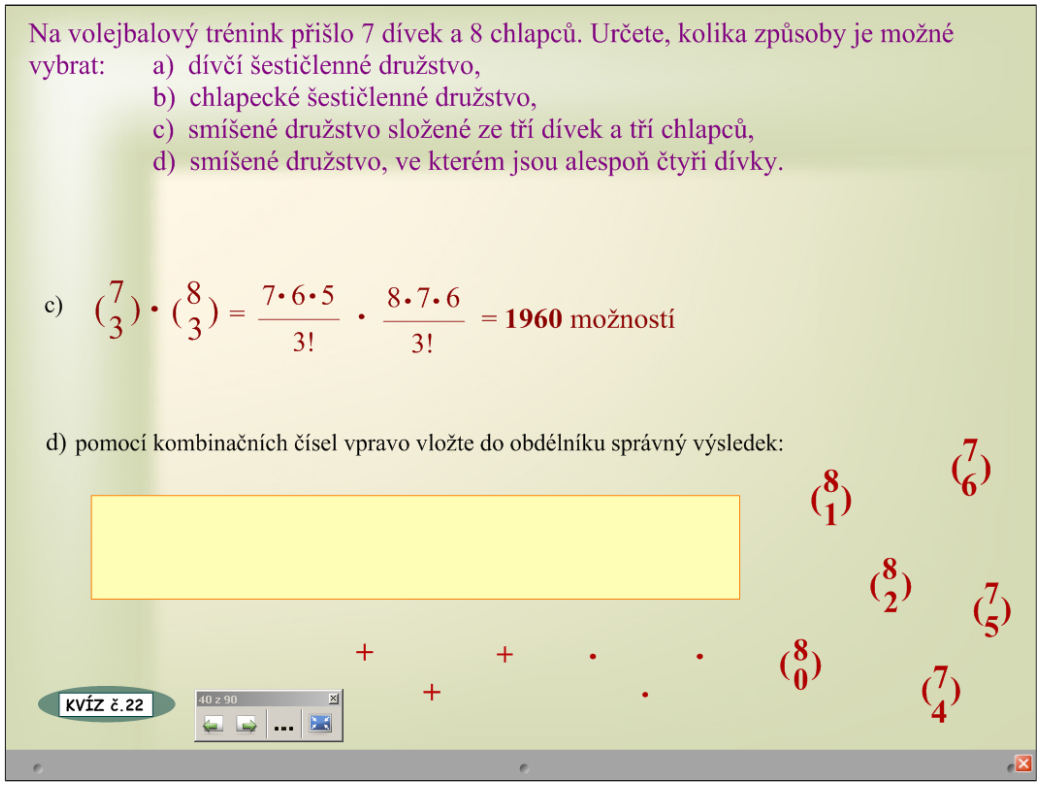
39. šablona



Úloha je rozložena do této a následující šablony. Odpovědi jsou schované pod vínovými obdélníky – stačí poklepat.

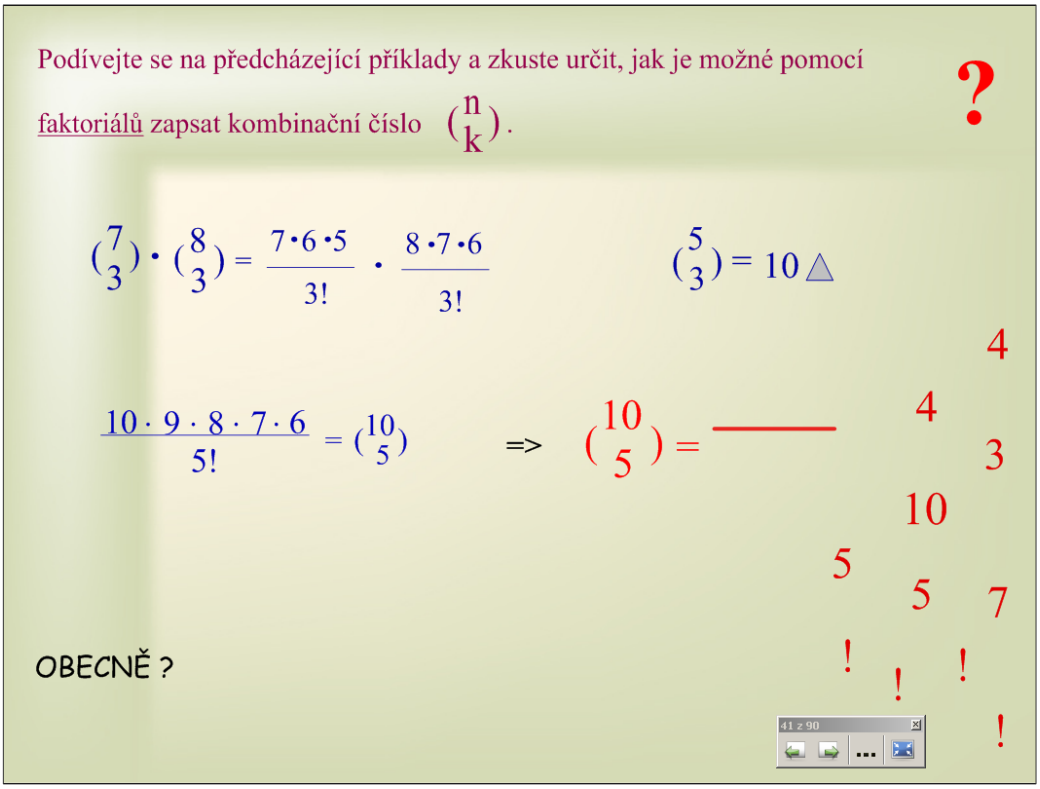
Úloha studentům naznačuje jednu z důležitých vlastností kombinačních čísel: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, o které se zatím nebudeme zmiňovat. Studenty však upozorníme na skutečnost, že nezáleží na tom, zda vybíráme 1 či 6 dívek ze sedmi. Výsledek je vždy stejný.

40. šablona



U poslední otázky (d) lze využít připravených kombinačních čísel a matematické operátory pro součet a součin. Studenti mohou vše ve správném pořadí vložit do připraveného žlutého obdélníku.

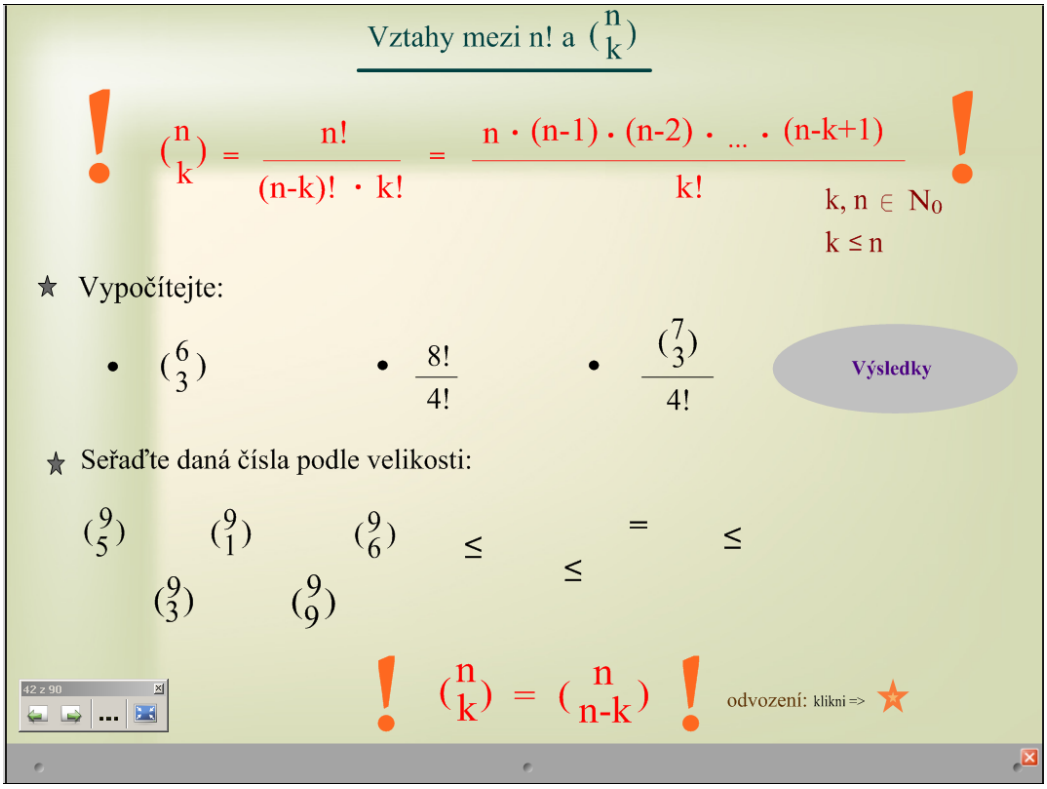
41. šablona



Stránka k zamyšlení – jak zapsat kombinační číslo pomocí $n!$. K rozepsání červeného kombinačního čísla $\binom{10}{5}$ pomocí připravených čísel a vykřičníků nám pomohou jak pár ukázek vložených v šabloně, tak i dříve vyřešené příklady v sešitě. S danými červenými objekty se dá pohybovat.

Závěrem je pak zapsání kombinačního čísla obecně, tj. rozepsání čísla $\binom{n}{k}$.

42. šablona



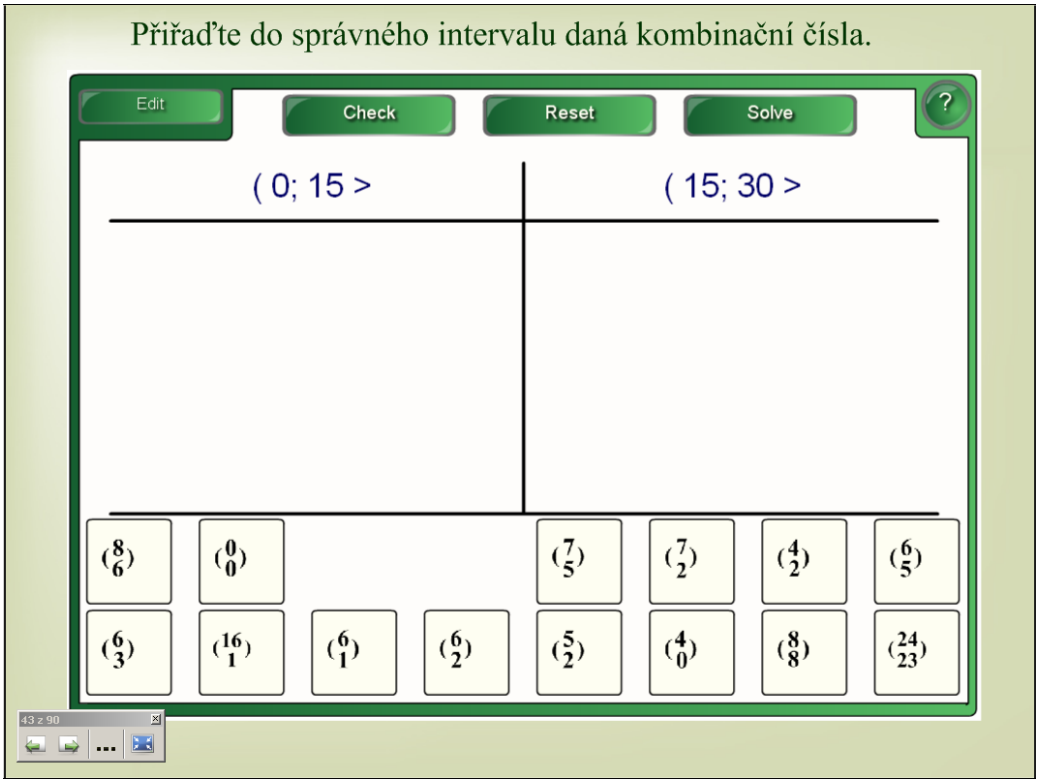
Tato šablona je velmi důležitá, neboť ukazuje základní vlastnosti kombinačních čísel. U prvního příkladu jsou výsledky zapsány pod fialovou elipsou: 20, 1680, $\frac{35}{24}$.

S objekty, resp. kombinačními čísly a znaménky relace druhého příkladu lze pohybovat a cílem je seřadit daná čísla podle velikosti. Správný výsledek je zapsán níže:

$$\binom{9}{9} \leq \binom{9}{1} \leq \binom{9}{3} = \binom{9}{6} \leq \binom{9}{5}.$$

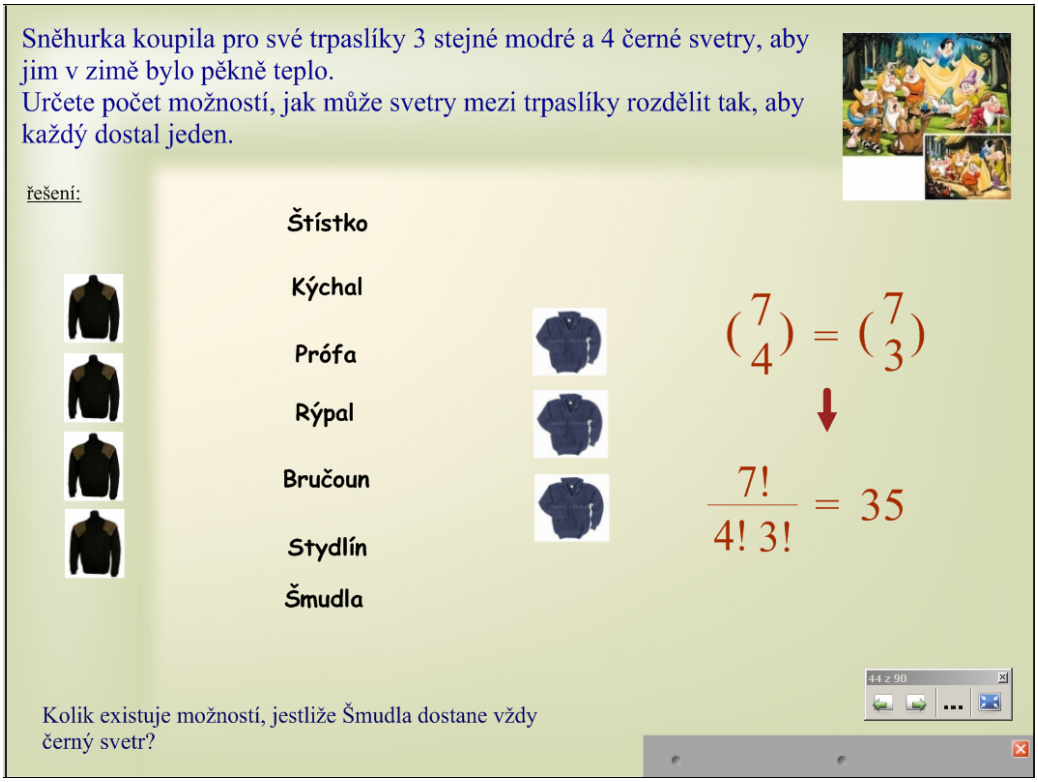
Vztah na konci šablony studenty již nepřekvapí, nicméně je vhodné ukázat odvození, resp. důkaz, že vztah opravdu platí. V animaci je i názorně ukázáno, čemu je rovno $\binom{n}{0}, \binom{n}{n}, \binom{n}{1}$.

43. šablona



Touto šablonou si studenti ověří, zda kombinační čísla pochopili. Jedná se o upravené předdefinované interaktivní cvičení z nástroje Lesson Aktivity Toolkit. Dotykem prstu na čtvereček s daným kombinačním číslem jej lze posunutím vložit do připraveného pole pod správný interval. Tlačítko „Check“ nám výsledek vyhodnotí, tlačítko „Solve“ ukáže správné řešení a pomocí tlačítka „Reset“ lze úlohu znovu připravit k řešení.

44. šablona

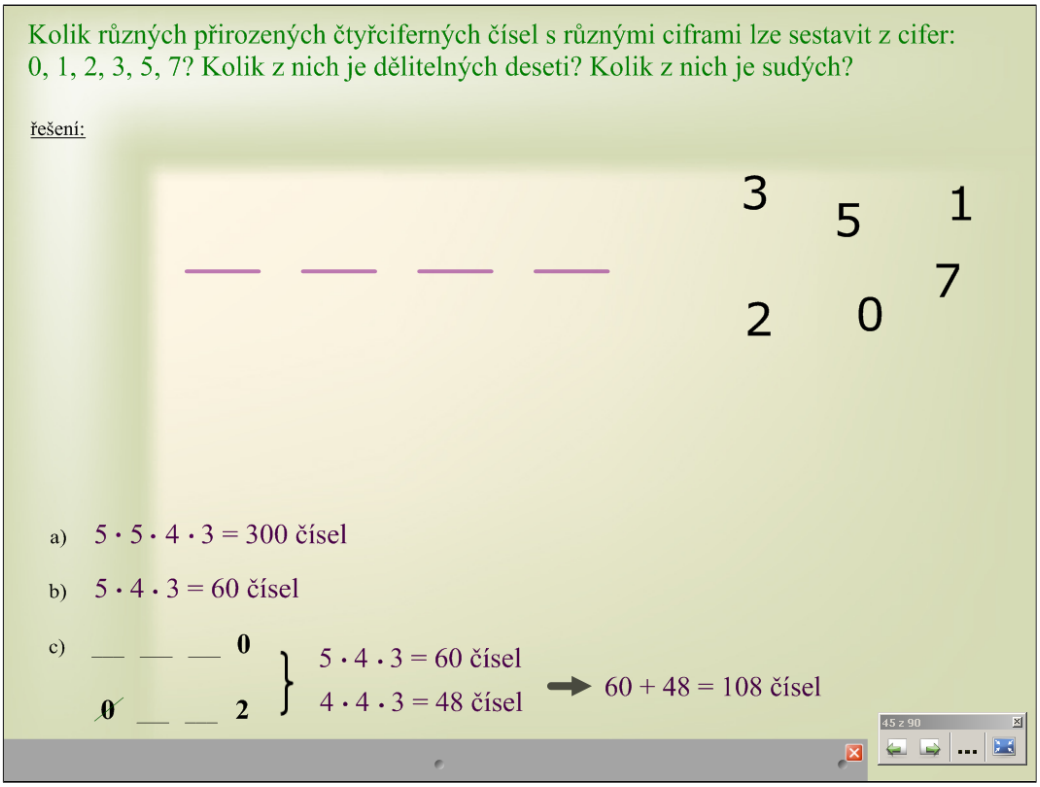


Názorný příklad na kombinace bez opakování jednoznačně prokazující platnost vztahu:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

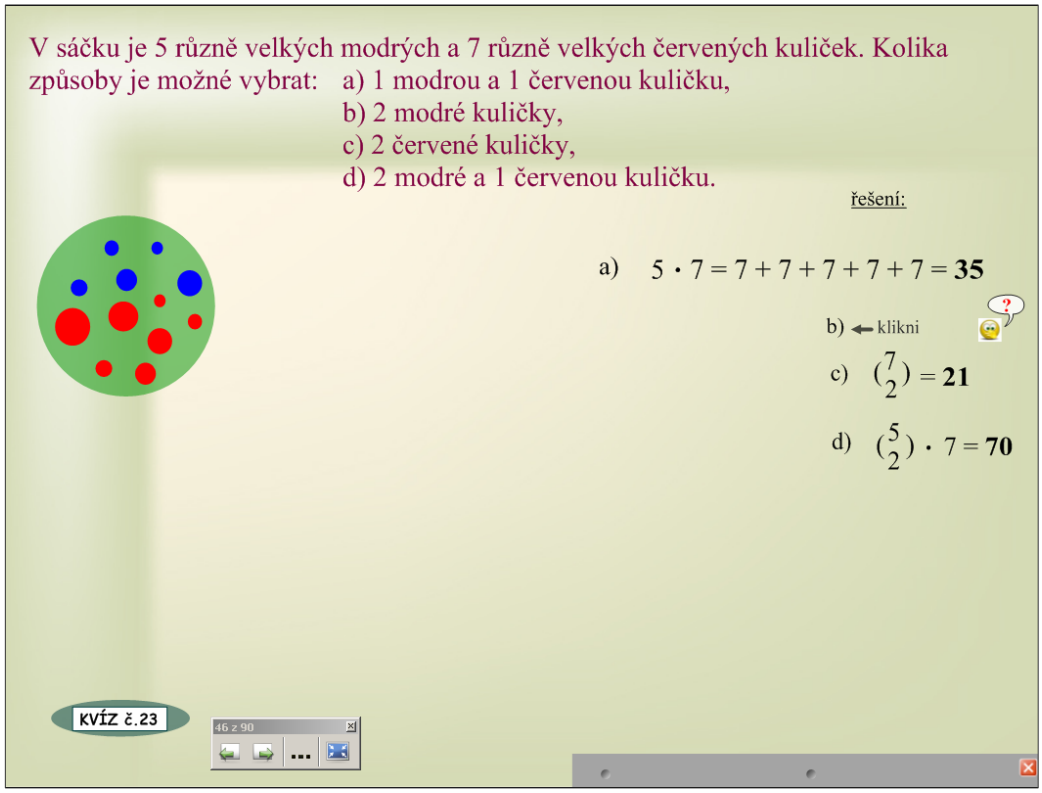
Se jmény všech trpaslíků lze manipulovat, a tak demonstrovat jednotlivé možnosti řešení. Řešením otázky s omezující podmínkou zapsané v dolní části šablony je kombinační číslo $\binom{6}{3}$.

45. šablona



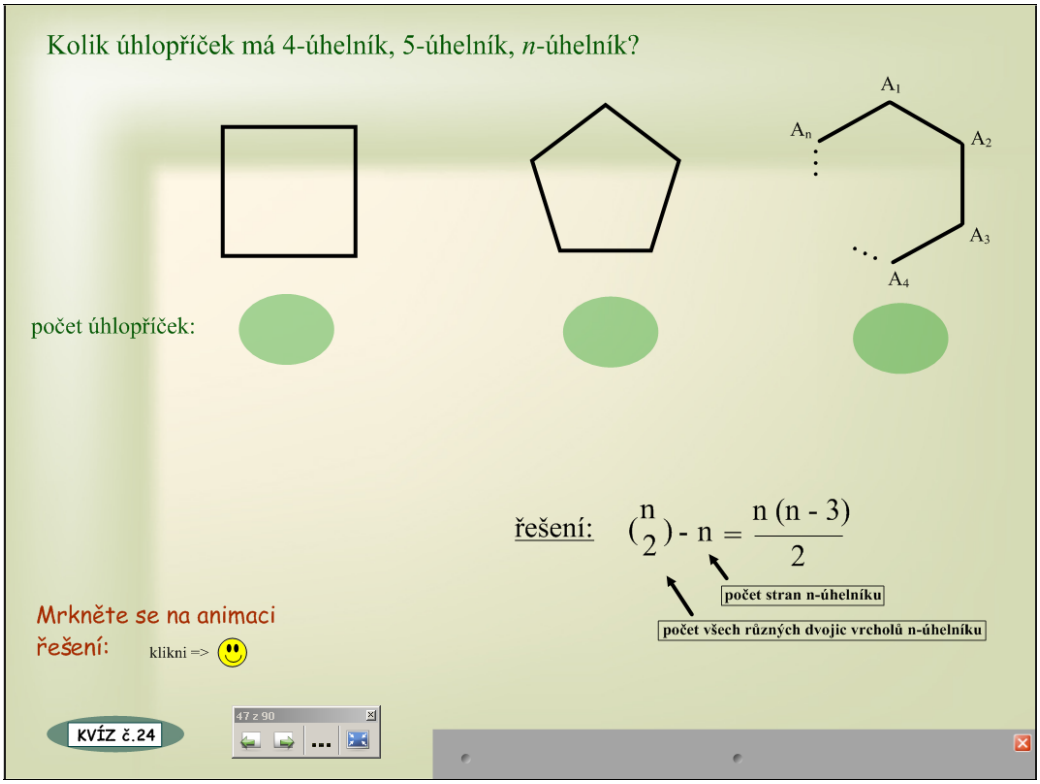
Obdobný příklad jako šablona 23. Nyní je však k dispozici i nula, která se chová na prvním místě v čísle jinak než čísla ostatní. Úsečky představující jednotlivé pozice jsou pevně dané a s danými ciframi se dá pohybovat. Domnívám se, že animace by zde byla zbytečná a nepotřebná.

46. šablona



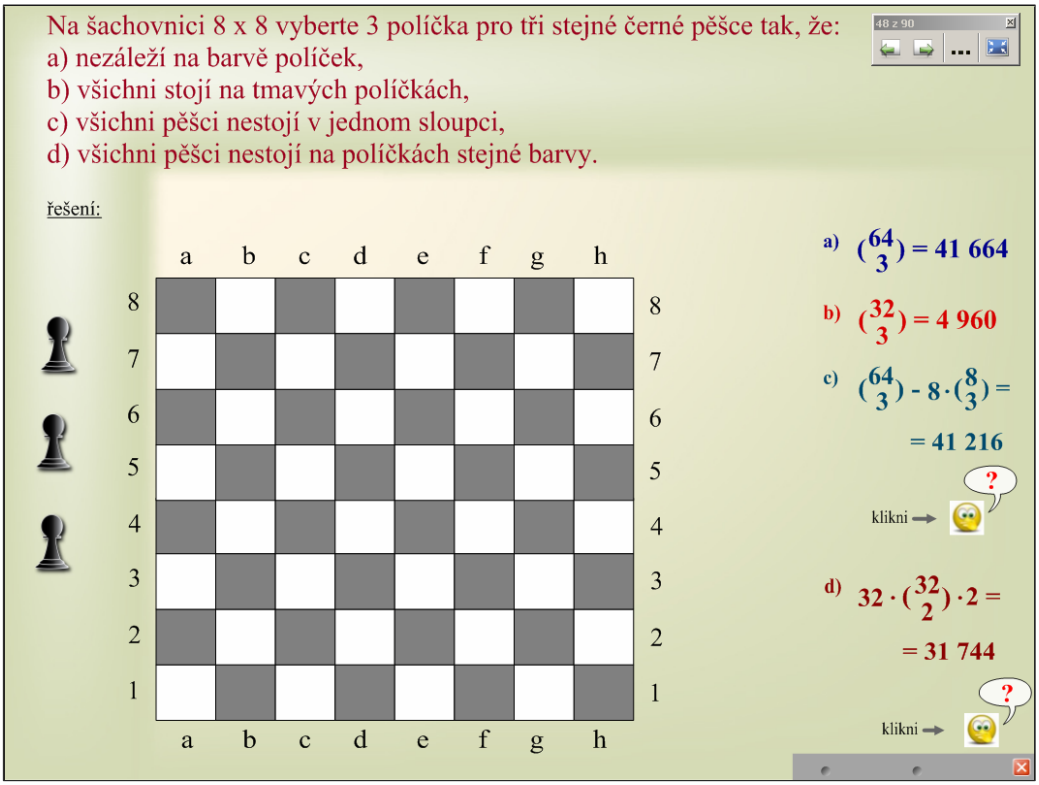
Ze sáčku vybíráme kuličky, přičemž nám nezáleží na pořadí vybíraných kuliček. S kuličkami v zeleném sáčku (kruhu) se dá pohybovat, a tak demonstrovat několik možností řešení. Domnívám se, že úloha není složitá, a proto není připravena žádná animace řešení. Výsledky na pravé straně stránky je nutné zakrýt stínítkem a výsledek *b)* je zapsána v okně, které lze otevřít kliknutím na *b)* (dva způsoby řešení).

47. šablona



Cílem tohoto příkladu je určit počet úhlopříček v daných geometrických útvarech. Nezáleží na postupech řešení a je tedy jedno, jak studenti výsledku dosáhnou. Pomoci si lze přiloženými obrázky, ale řešení popsané v šabloně musí být schováno. Geometrické útvary jsou pevně vloženy, a tak si lze tužkou vyznačit počet úhlopříček u čtverce a pětiúhelníku.Výsledné číslo zapíšeme do připravených zeleně vybarvených elips.
Vzhledem k charakteru úlohy je pro lepší pochopení připravena animace řešení (kliknout na „smajlíka“). V animaci je však ukázáno řešení na pravidelném šestiúhelníku.

48. šablona



Úloha obsahuje 4 části, přičemž první i druhá jsou nejjednodušší. Šachovnice je umístěna napevno, s třemi černými pěšci se dá pohybovat a posunovat na jednotlivá políčka. V pravé části šablony jsou stručně popsána řešení, která je nutno postupně odkrývat „roletkou“.
U úlohy c) a d) jsou znázorněny dva způsoby řešení a ten složitější (určen pouze pro schopné studenty) je v obou případech umístěn v obrázku, který se otevře kliknutím na „smajlíka“.

Úloha c): pokud si klikneme na druhý způsob řešení (pro schopné studenty), objeví se:

$$\left[\binom{8}{2} \cdot 56\right] \cdot 8 + \binom{8}{3} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 .$$

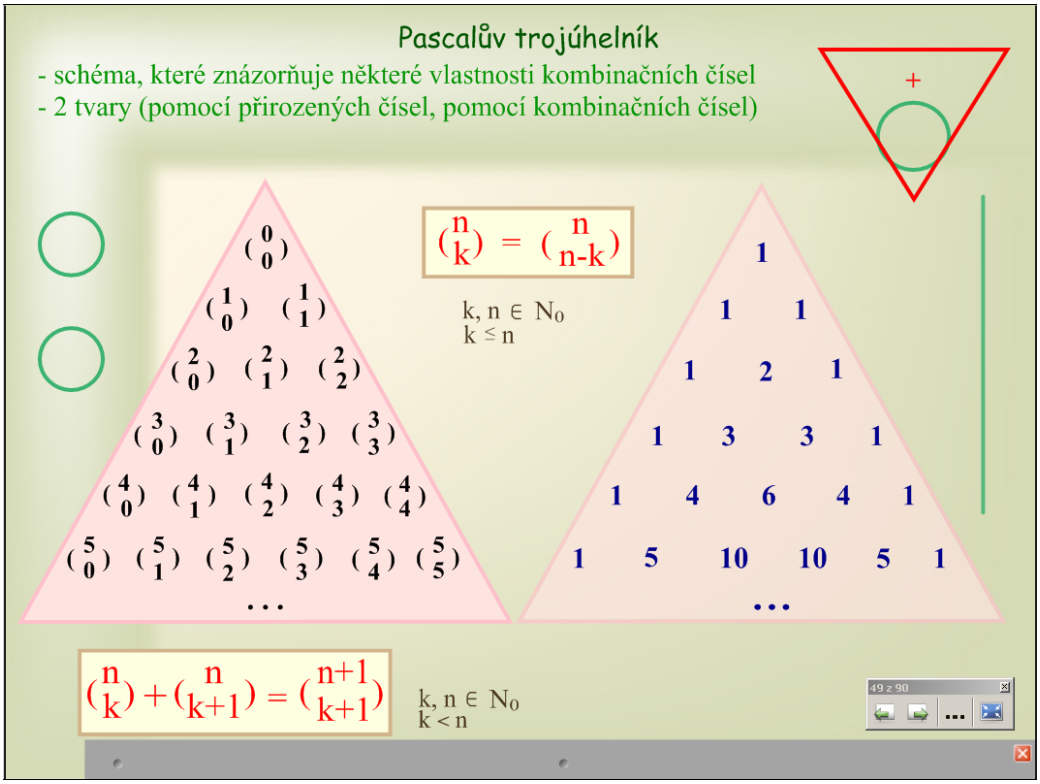
Výraz říká: Z osmi políček jednoho sloupce vyberu dvě políčka pro dva pěšce, pro třetího pěšce mám zbylých 56 políček a celé to násobím dvěma, protože máme 8 různých sloupců (tj. kdy dva pěšci stojí v jednom sloupci). Zbývá vyřešit situace, kdy každý pěšec bude v jiném sloupci. Nejprve se vyberou 3 sloupce a poté v každém sloupci 1 políčko z osmi.

Úloha d): Obdobně jako v úloze *c)* po kliknutí na „smajlíka“, objeví se složitější způsob řešení:

$$\binom{64}{3} - 2 \cdot \binom{32}{3}$$

(Od všech možností odečteme ty, co nepřipadají v úvahu.)

49. šablona

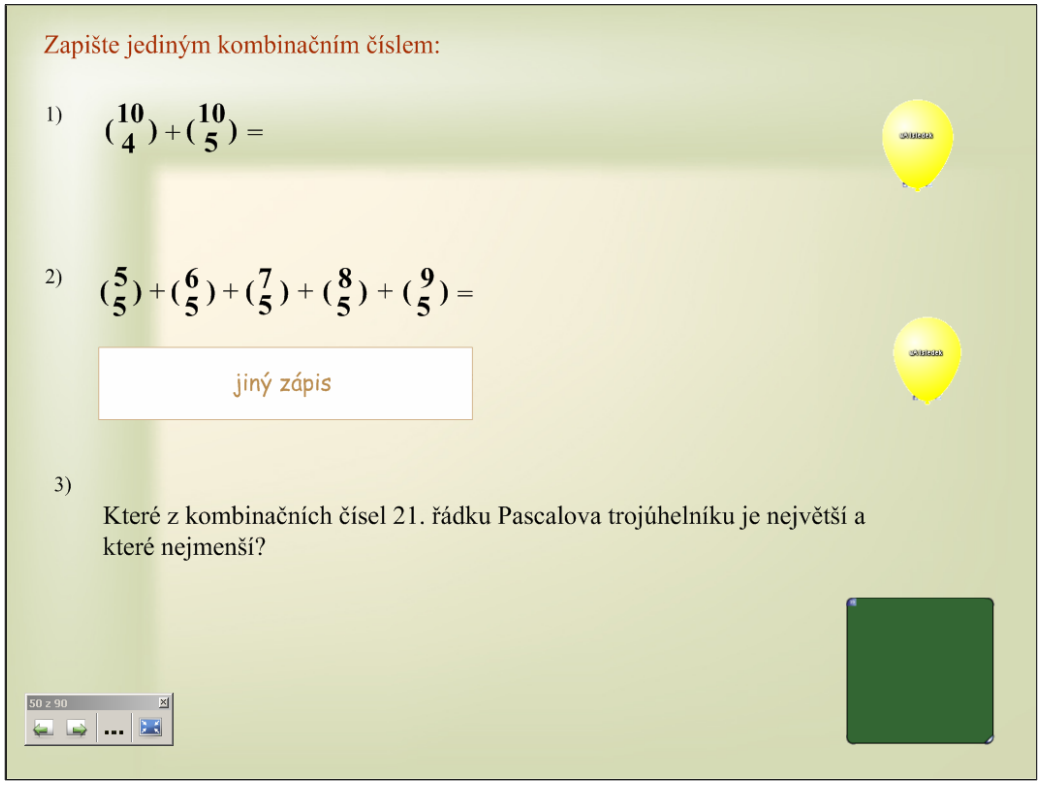


Šablona zobrazuje tzv. Pascalův trojúhelník, na kterém lze demonstrovat řadu zajímavých vztahů mezi kombinačními čísly. Pomocí dvou zelených kroužků a svislé zelené úsečky (lze jimi pohybovat) je možné ukázat symetrii trojúhelníku a pomocí červeného trojúhelníku druhou vlastnost:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Stínítkem je vhodné nejprve zakrýt spodní část, aby studenty druhý vztah nerozptyloval. Poté, co se názorně ukáže první vztah, se může studentům položit otázka, zda-li by přišli ještě na jiný vztah.

50. šablona



Tyto tři příklady slouží k prověření pochopení základních vztahů Pascalova trojúhelníku a schopnosti s trojúhelníkem pracovat.
Výsledky:

1) $\binom{11}{5}$

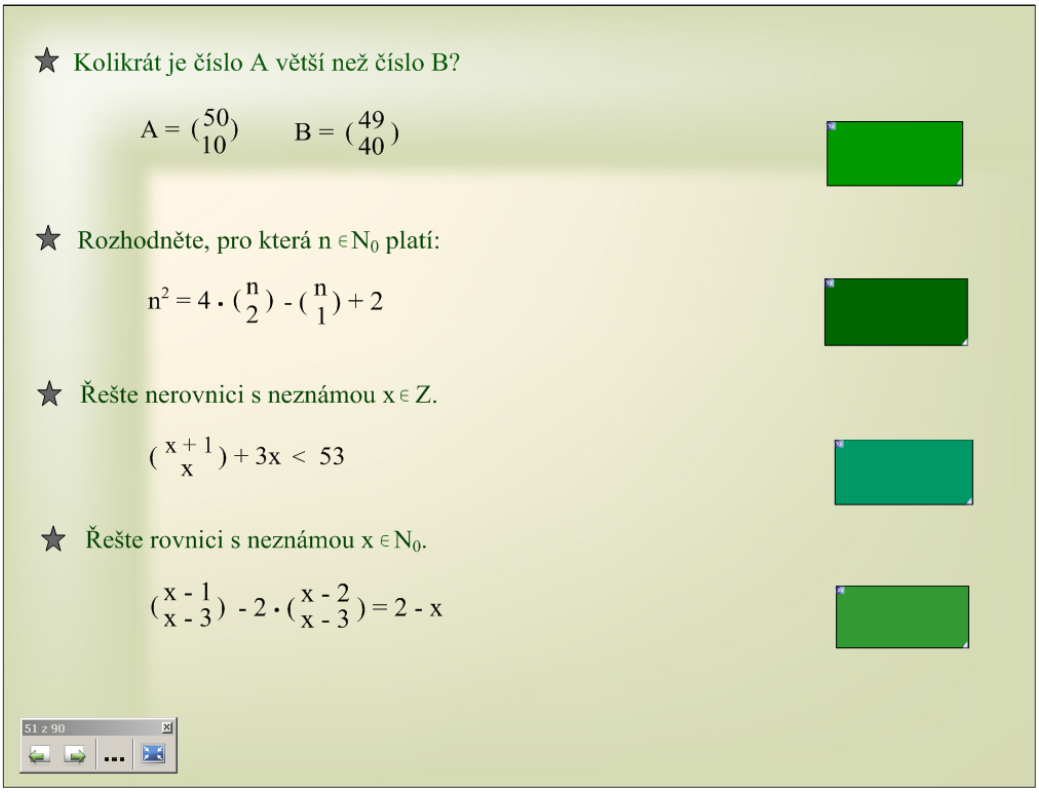
2) $\binom{10}{6}$

3) $\binom{20}{10}, \binom{20}{0}=\binom{20}{20}=1$

Správné odpovědi jsou schované pod balónky či pod zeleným čtvercem – stačí na daný objekt kliknout.

Domnívám se, že s druhým příkladem mohou mít studenti s počátku potíže, neboť je nutné si uvědomit, že $\binom{5}{5}$ se dá zapsat jako $\binom{6}{6}$. V tomto případě pomůže položení otázky: „Jakým kombinačním číslem lze první kombinační číslo nahradit?“ a nikoliv sdělení řešení.

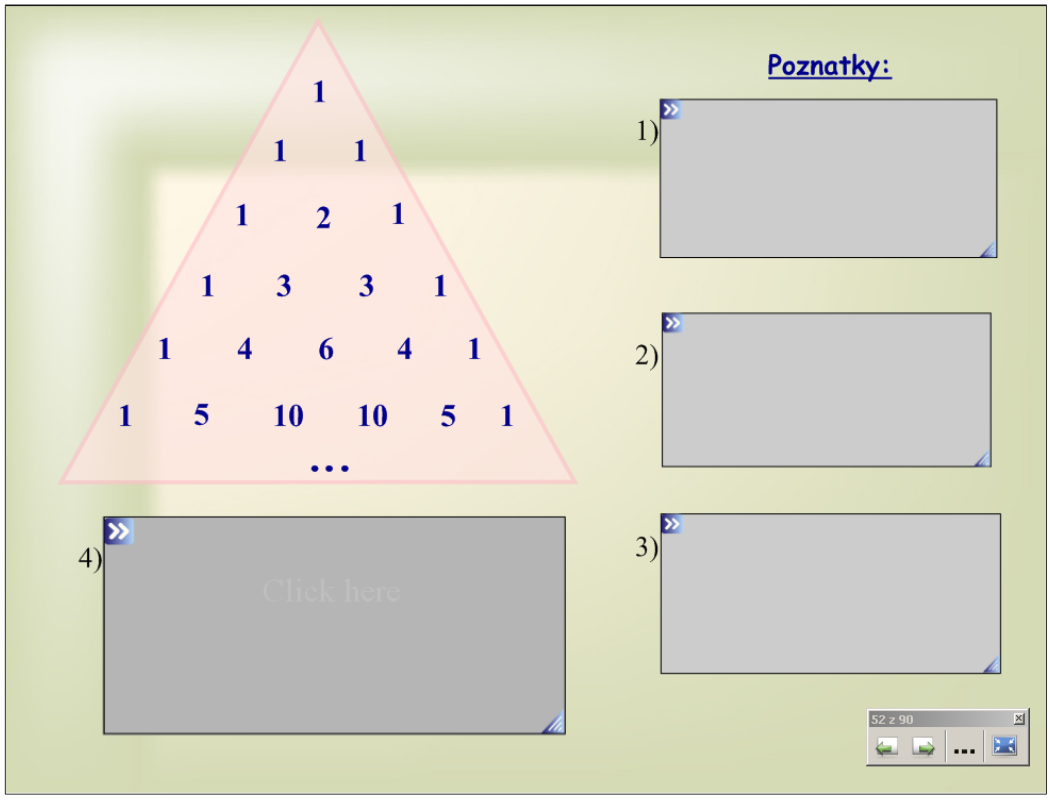
51. šablona



Šablona obsahuje malou sbírku různých úloh. Zelené obdélníky schovávají správné výsledky:

* A je 5krát větší než B
* $n \geq 2, n = 2$
* $x \geq 0 \wedge x < 13$
* $x = 3$

52. šablona



Pascalův trojúhelník má své využití nejenom např. v binomické větě, ale dá se v něm najít i řada dalších zajímavostí – stačí kliknout na šedé obdélníky.
První šikmý sloupec jdoucí zprava shora doleva (doprava) dolů, resp. diagonální řady na krajích obsahují samé jedničky. (Šedý obdélník č. 1)
Druhý šikmý sloupec jdoucí stejným směrem, resp. diagonální řady vedle krajních obsahují přirozená čísla od 1 výše. (Šedý obdélník č. 2)
Ve **třetím** šikmém sloupci stejného směru (šedý obdélník č. 3) jsou zapsána všechna trojúhelníková čísla:

$$1, 3, 6, 10, 15, \ldots = \binom{2}{2}, \binom{3}{2}, \binom{4}{2}, \binom{5}{2}, \ldots$$

Dále např. ve **čtvrtém** šikmém sloupci se nacházejí čtyř stěnová čísla, tj. čísla:

$$1, 4, 10, 20, \ldots = \binom{3}{3}, \binom{4}{3}, \binom{5}{3}, \binom{6}{3}, \ldots$$

Pascalův trojúhelník nám udává ještě jeden zajímavý vztah mezi kombinačními čísly platný pro všechna přirozená čísla k a n:

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \ldots + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2}$$

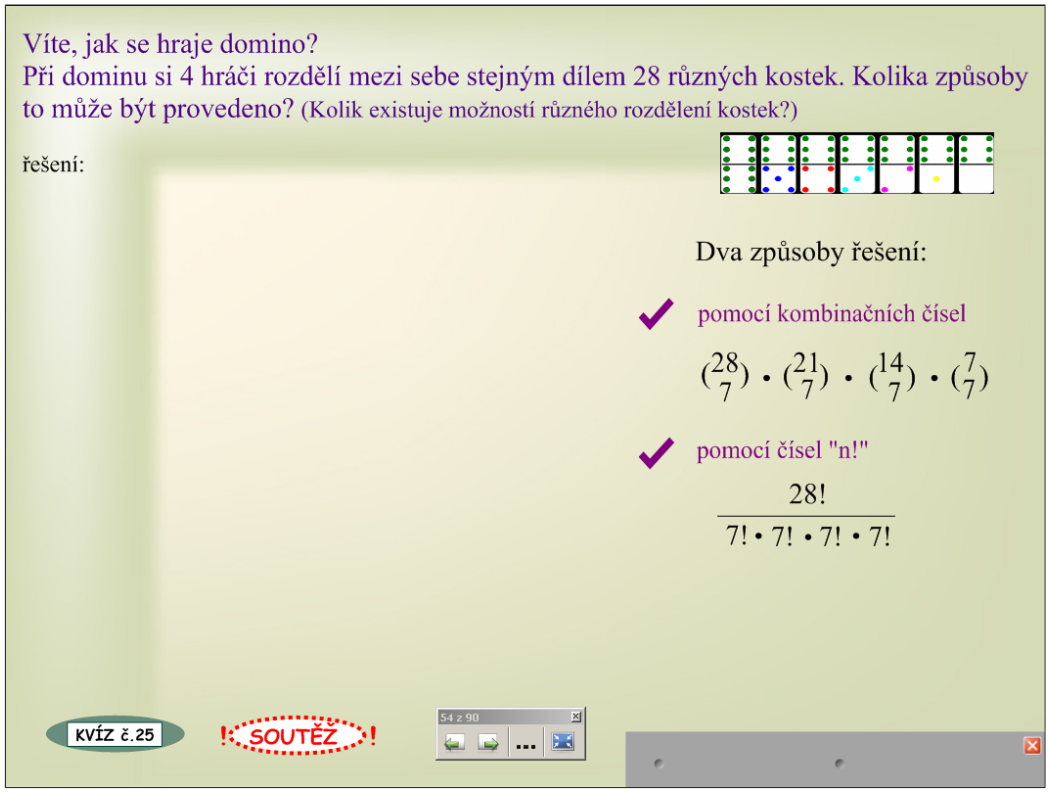
OBECNĚ: $$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n}{k+1}$$

53. šablona

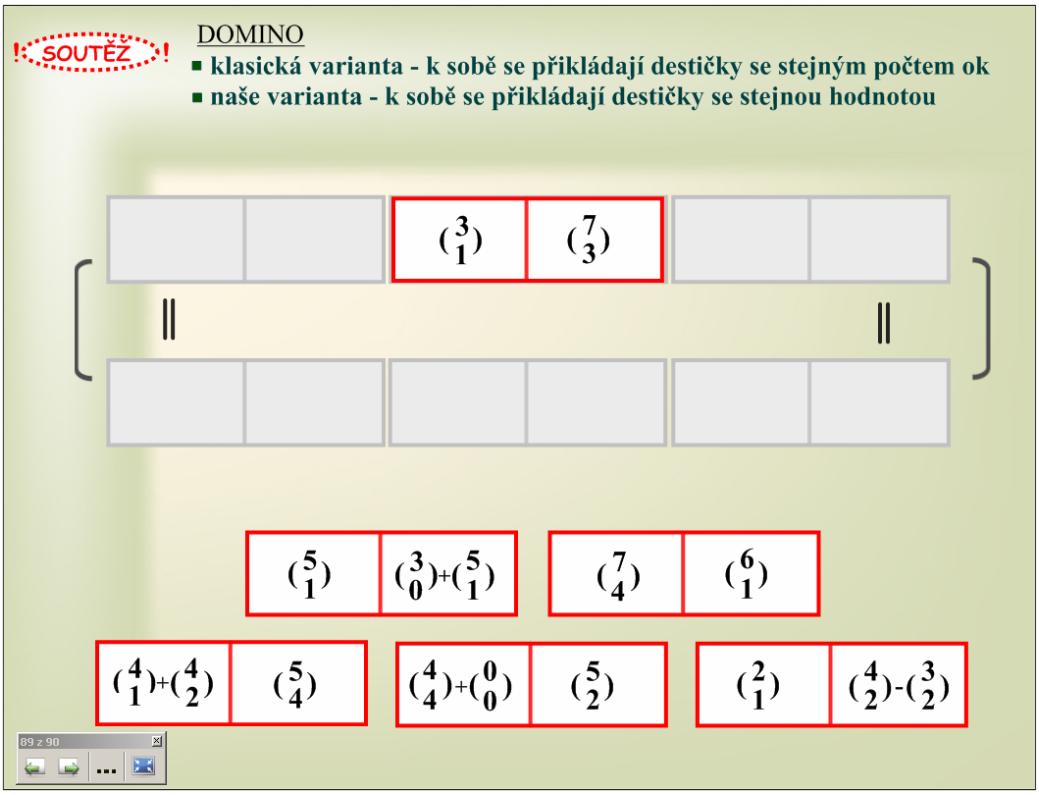
V hnědém sáčku jsou umístěné všechny kuličky, přičemž se všemi se dá pohybovat. Pod žlutým balónkem je skryta správná odpověď na otázku *a)* a u druhé části úlohy (*b*) jsou připraveny dva způsoby řešení schované pod šedými elipsami – stačí útvarem posunout jinam. Jedná se o tyto postupy:

* $\binom{5}{3}$
* $\binom{6}{3}-\binom{5}{2}$

54. šablona



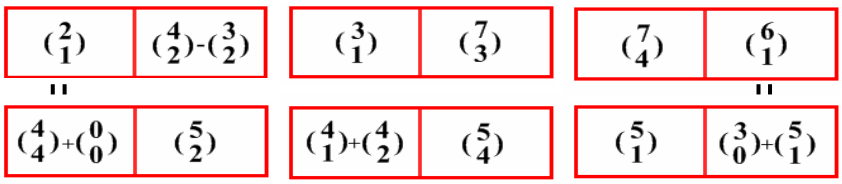
Po zvládnutí všech předchozích úloh je řešení tohoto příkladu bezproblémové. Úlohu může řešit každý student zvlášť a úkolem nemusí být pouze nalezení správného výsledek, ale i např. dvou rozdílných způsobů řešení. Je však nutné pracovat se zakrytou pravou částí stránky.
Lze využít nejen kvízu, který by mohl studenty bavit, neboť se jedná o moderní záležitost, ale i soutěže – viz následující stránka v příručce.



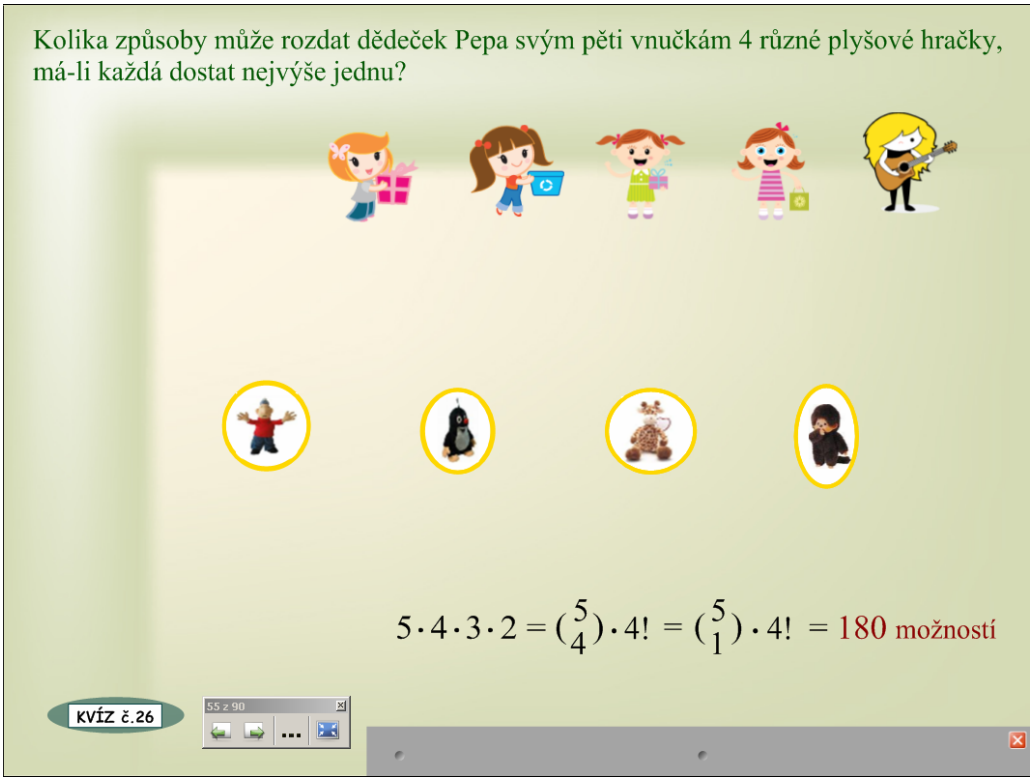
Soutěž, stejně jako kvíz, slouží ke zpestření probírané látky. V našem případě jde o hru domino ve variantě s kombinačními čísly. Ve třídě se mohou vytvořit dvě skupinky a každá z nich vybere jednoho statečného. Hráči se v přikládání destiček střídají a pravidla mohou být následující:

- Kdo dřív bez použití kalkulačky správně určí kombinační číslo $\binom{7}{3}$, začíná.
- Vybere správnou destičku a přiloží, resp. posune na správné pole. Pokud přiloží správně, dostává 1 bod. V opačném případě dostává bod druhý hráč.
- Hra končí položením všech destiček.

Správná odpověď:



55. šablona



V tomto příkladě hraje důležitou roli slovo „nejvýše“. Se všemi obrázky na šabloně lze pohybovat, a tak pokud to bude zapotřebí, názorně si ukázat jedno z možných řešení. Tzn. lze vybrat jednu hračku a přiřadit k jednomu děvčeti, pak lze vybrat druhou hračku a přiřadit (posunout) k dalšímu děvčeti, které ovšem ještě hračku nevlastní, atd.

56. šablona

Vzhledem k obtížnosti úlohy obsahuje tato šablona i animaci řešení. Dívky jsou zde umístěné napevno, kdežto u obrázku rohlíku je využit „nekonečný klonovač“, tzn. že rohlíků máme nekonečně mnoho a můžeme je přiřazovat k jednotlivým dívkám.

Správná odpověď je $5+\binom{5}{2}=15$ možností.

V této šabloně si lze zopakovat i Pascalův trojúhelník a tím i vlastnosti kombinačních čísel – poklepat na šedivý trojúhelník. Na šabloně se objeví následující úkol:

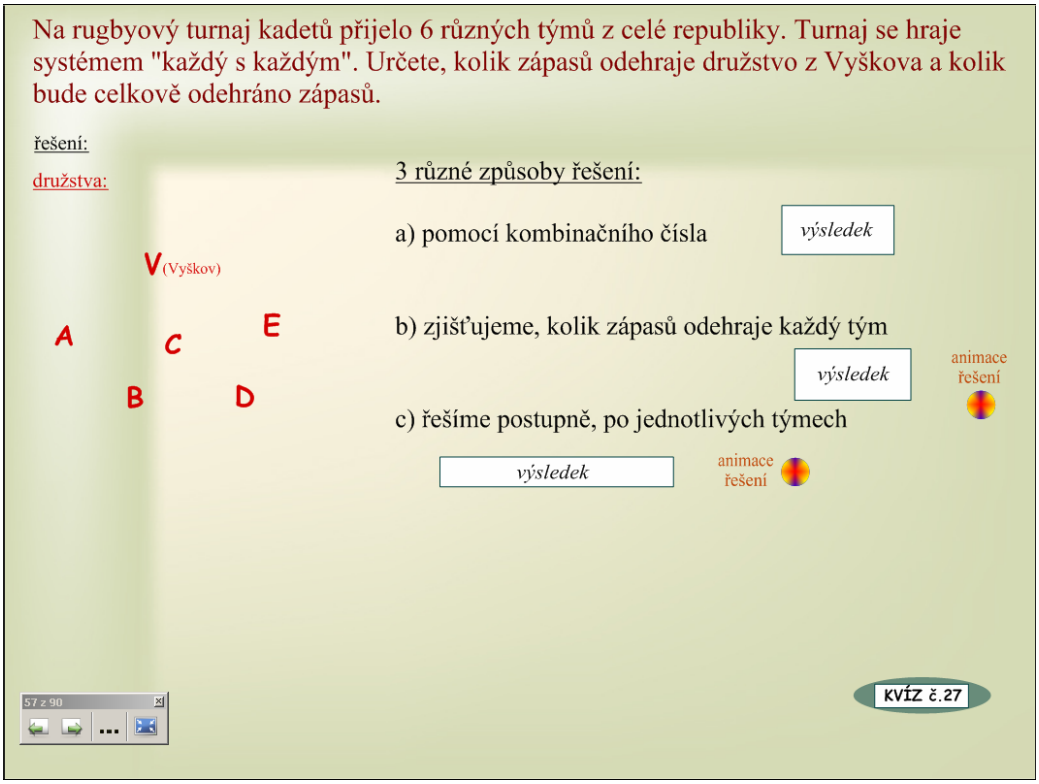
„*Zkontroluj, zda šestý řádek v Pascalově trojúhelníku má tvar:*

1 5 12 12 5 1

a odvoďte z něj řádek následující, tj. sedmý.“

Připravený Pascalův trojúhelník ukážeme až po vyřešení úkolu. Klikne-li se v pravém horním rohu na slovo „zpět“, vrátíme se k danému příkladu.

57. šablona



Přestože se jedná o ne příliš složitý příklad, jsou zde vloženy dvě animace řešení. Na tomto příkladě lze velice dobře ukázat 3 způsoby řešení včetně výsledku:

a) $\binom{6}{2} = 15$ (Pomocí kombinačního čísla)

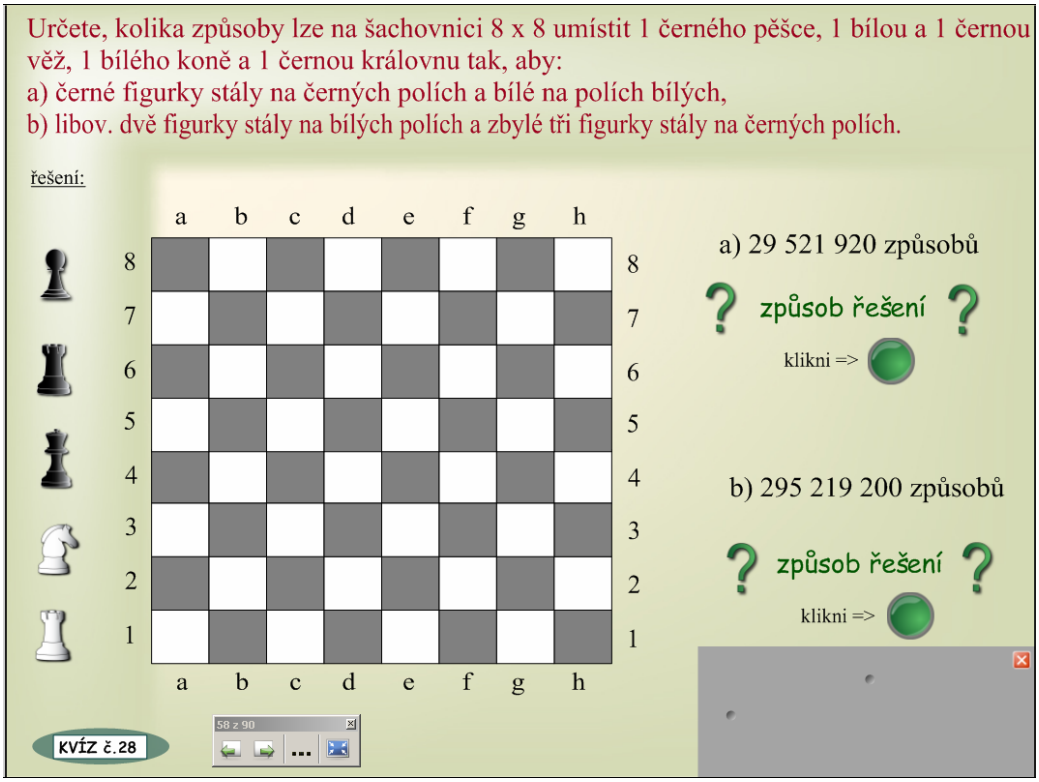
b) $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

c) $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$

S jednotlivými písmeny představujícími různé týmy se dá pohybovat a názorně tak demonstrovat všechny způsoby řešení. Zakrytím pravé poloviny šablony stínítkem nebudou studenti rozptylováni jednotlivými způsoby řešení.

Přiložený kvízem č. 27 je možné ukázat studentům jeden velmi zajímavý rituál v ragbyovém světě. Podmínkou je však přístup k internetu, neboť kvíz odkazuje na konkrétní webovou stránku.

58. šablona



Příklad je rozdělen na dvě části, z nichž ani jedna není obtížná. Obrázek šachovnice je umístěn napevno a jednotlivými šachovými figurky lze pohybovat a posunovat po šachovnici. Opět existuje několik způsobů řešení. Dvě z nich získáte kliknutím na zelené puntíky:

a) $\binom{32}{3}\cdot 3!\cdot\binom{32}{2}\cdot 2! = 32\cdot 31\cdot 30\cdot 32\cdot 31$

b) $\binom{5}{2}\cdot 32\cdot 31\cdot 32\cdot 31\cdot 30 = \binom{32}{2}\cdot\binom{32}{3}\cdot 5! = \binom{32}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot 2!\cdot\binom{32}{3}\cdot 3!$

Studenti mohou příklad vyřešit po svém, pak si společně jednotlivé způsoby řešení ukázat a diskutovat o tom, co každé kombinační číslo či určité součiny vyjadřují.

3.1.2 Závěr první části

59. šablona

Tato šablona uzavírá první část příručky. Je specifická tím, že i zde se lze zabývat kombinatorikou - viz dolní část šablony.

Po probrání této části i-příručky by studenti měli rozpoznat rozdíly mezi kombinatorickým pravidlem součtu a součinu, mezi kombinačním číslem a číslem $n!$ a současně i vymyslet na každé číslo ukázkový příklad. Totéž platí i pro vztahy kombinačních čísel, Pascalův trojúhelník a co je nejdůležitější - **správně vyřešit celou řadu kombinatorických úloh bez opakování**.

3.2. Kombinatorika s opakováním

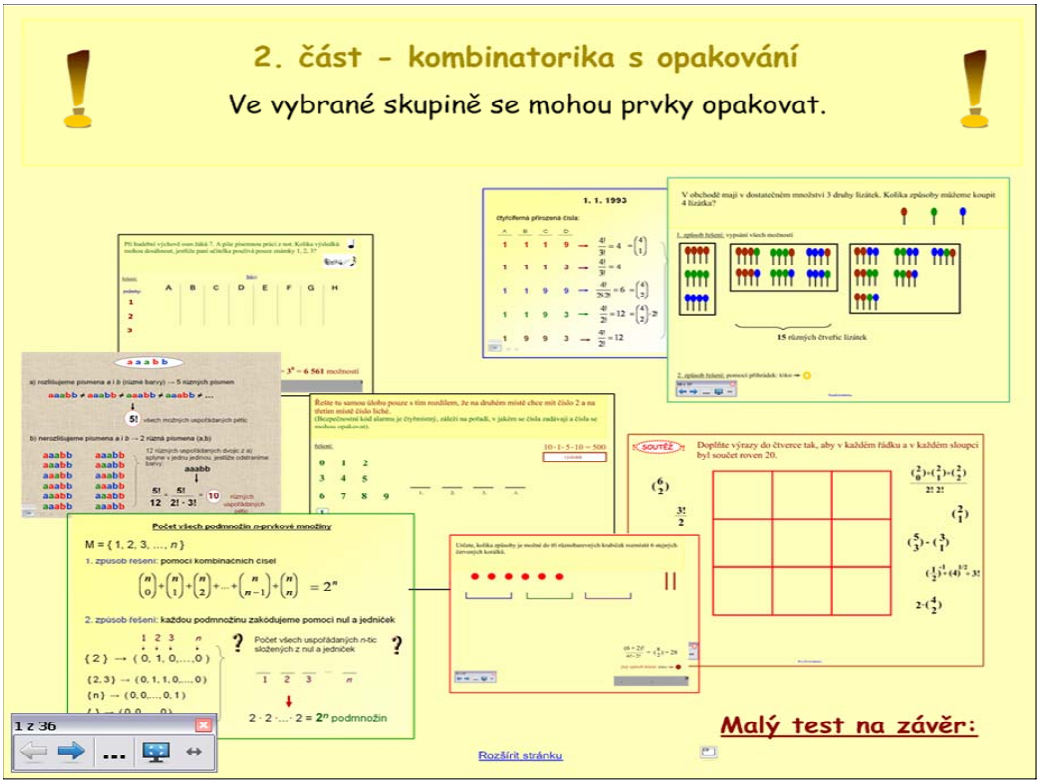
Tato část interaktivní příručky je realizována obdobně jako její první část pouze s tím rozdílem, že neobsahuje kvízy. V této fázi se již studenti s kombinatorikou seznámili a je pouze na rozhodnutí vyučujícího, zda pokračovat dál se zábavnými otázkami, zajímavostmi, které si však už připraví sám. Vyučovací hodiny je možné zpestřovat různými skupinovými soutěžemi. Kombinatorika s opakováním je kratší než první část interaktivní učebnice a to umožňuje více pracovat ve skupinách (dvojicích, trojicích, …). Práce ve skupinách je při výuce kombinatoriky výhodná v tom, že studenti mohou řešení hledat sami, nad řešením diskutovat, navzájem si vše vysvětlovat a tím upevňovat své vědomosti. Pro lepší pochopení složitějších úloh jsou ale i zde vloženy animace řešení, které se osvědčily. Jsou připraveny v programu PowerPoint, což umožňuje s nimi dál pracovat.

Mezi složitější příklady jsou vloženy jednodušší, aby náročnější úlohy studenty neodradily od další práce.

I nadále platí pravidlo neustále se studenty diskutovat o různých způsobech řešení, a tak trénovat jejich představivost a podporovat zdravé myšlení. Vždy je důležité nepředkládat studentům hotová fakta, výsledky či postup řešení, ale nechat jim nějaký čas na promyšlení odpovědi.

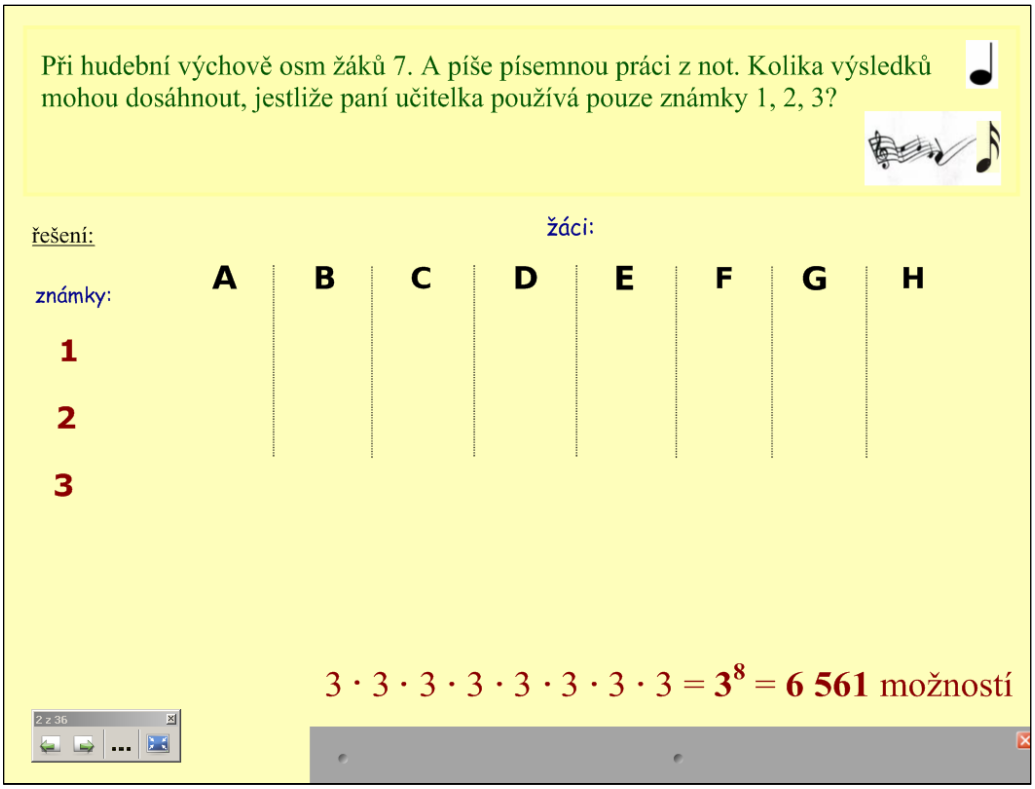
3.2.1 Šablony druhé části i-učebnice

1. šablona



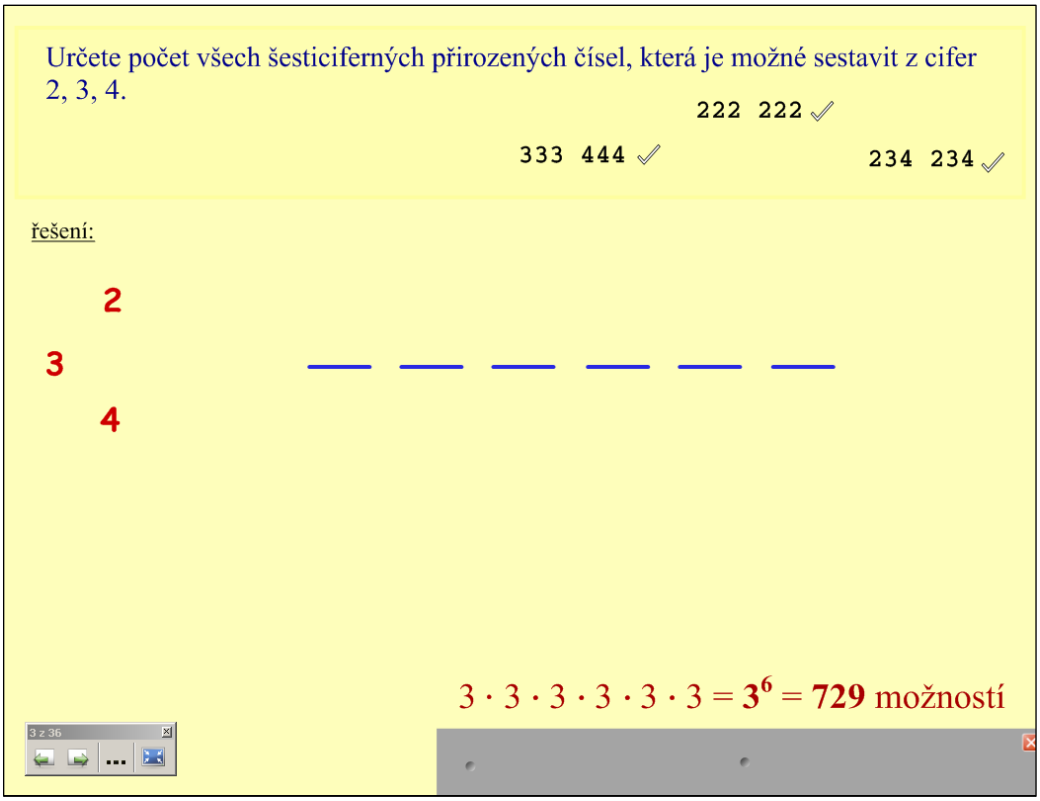
Na šabloně jsou znázorněny některé úlohy, animace, které jsou součástí druhé části interaktivní učebnice. V pravém rohu stránky a zároveň závěrem celé kombinatoriky je malý test, který obsahuje tři úlohy, jejichž zadání získáme kliknutím na příslušný obdélníček u textu.

2. šablona



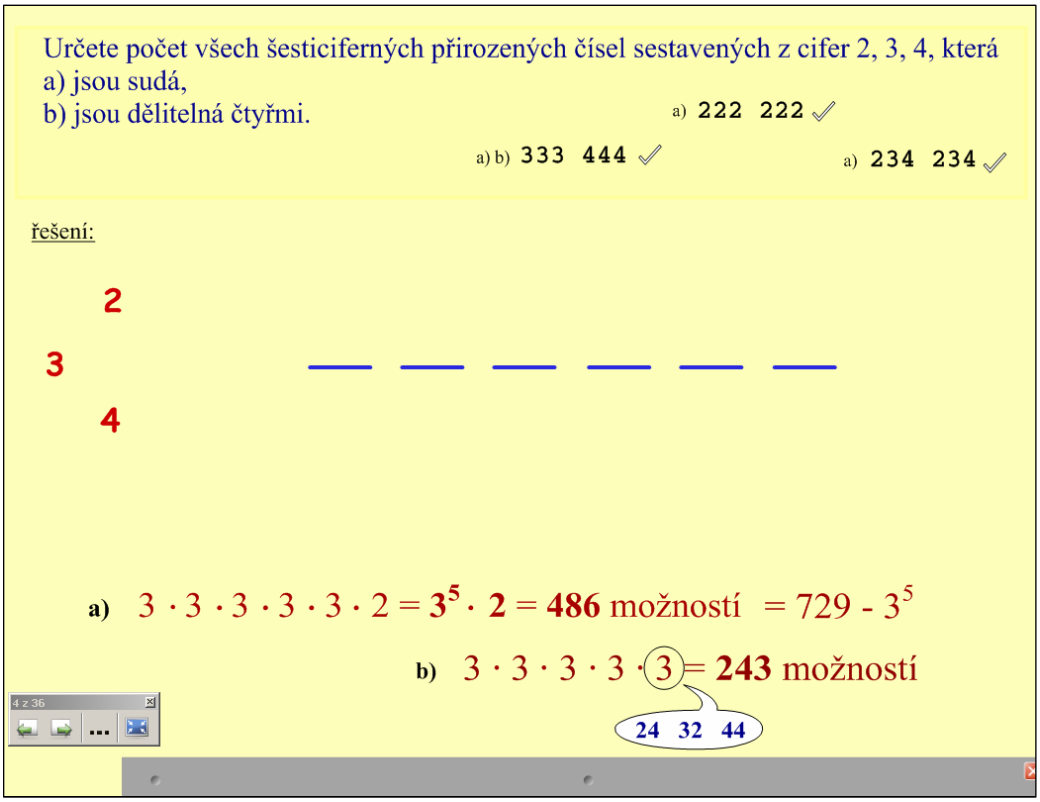
Jednoduchý příklad, jehož cílem je najít řešení pouze pomocí kombinatorického pravidla součinu a přitom si všimnout, že prvky se nám již mohou opakovat. V levé části všechny tři známky jsou „naklonované“, tzn. jakoukoliv známku lze nekonečně mnohokrát prstem uchopit a přesunout ke kterémukoliv žákovi. Žáci jsou označeni písmeny *A* až *H*. Je nutné si uvědomit, že každému žáku je možné přiřadit všechny tři známky a tedy výsledek je roven číslu 3^8. Šedé stínítko by mělo skrývat po celou dobu řešení správný výsledek.

3. šablona



Obdobný příklad je uveden již v první části i-učebnice. Důvodem vložení této úlohy je skutečnost, že ji studenti už znají ale s jinými omezujícími podmínkami. Číslice 2, 3, 4 jsou „naklonované“ a připravené modré úsečky představují jednotlivé pozice šesticiferného čísla. S číslicemi 2 až 4 lze posunovat na jednotlivé pozice; úsečky jsou však pevně dané.

4. šablona



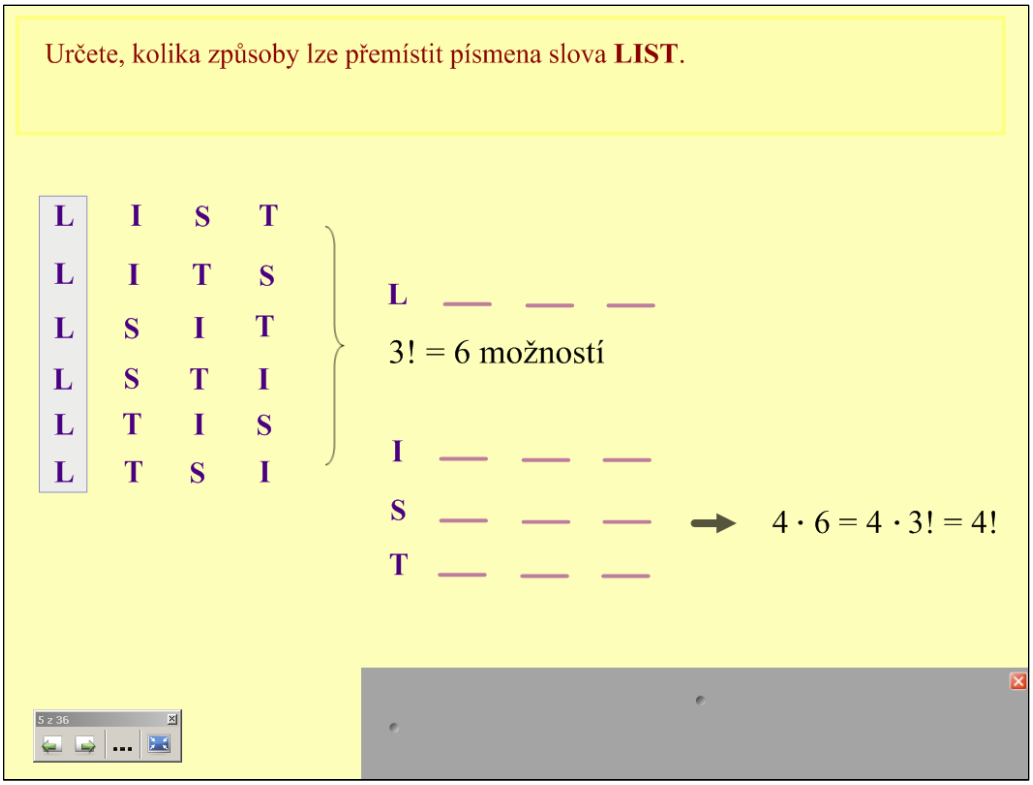
Úloha v této šabloně navazuje na předcházející. V tomto případě se již objevují další dvě omezující podmínky. Pro určení všech sudých čísel lze postupovat dvěma způsoby a oba způsoby by studenti měli znát:

- $3^5 \cdot 2 = 486$
- $729 - 3^5 = 486$

V případě *b)* je nutné si nejprve uvědomit, kdy je číslo dělitelné čtyřmi a poté si všechna možná dvojčísla vypsat. Stejně tak je důležitá skutečnost, že daná dvojčísla vkládáme na poslední dvě pozice, a tudíž nám zbývají již pouze čtyři pozice, kde se může vyskytovat libovolná ze tří číslic.

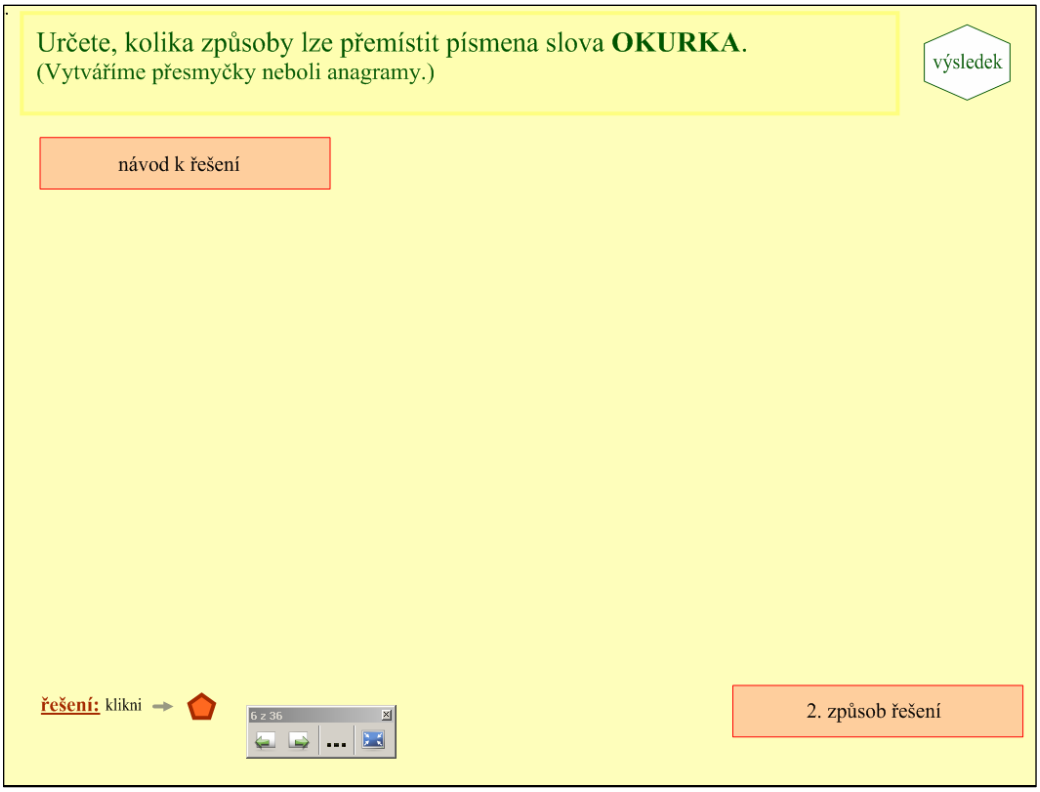
Při řešení je vhodné využít připravené „roletky“ a číslice 2, 3, 4 jsou pro možné názorné ukázky „naklonované“.

5. šablona



Příklady všech předchozích šablon byly zaměřeny na variace s opakování. Úloha této šablony slouží k zopakování permutací bez opakování, tj. čísla $n!$, a je tak úvodem k úlohám týkajících se permutací s opakováním. Při řešení této jednoduché úlohy je výhodné stínítkem zakrýt vše kromě zadání. V nutném případě (student bude i nadále „tápat“) se může postupně odkrýt pomocný obrázek a na něm vše podrobně vysvětlit.

6. šablona

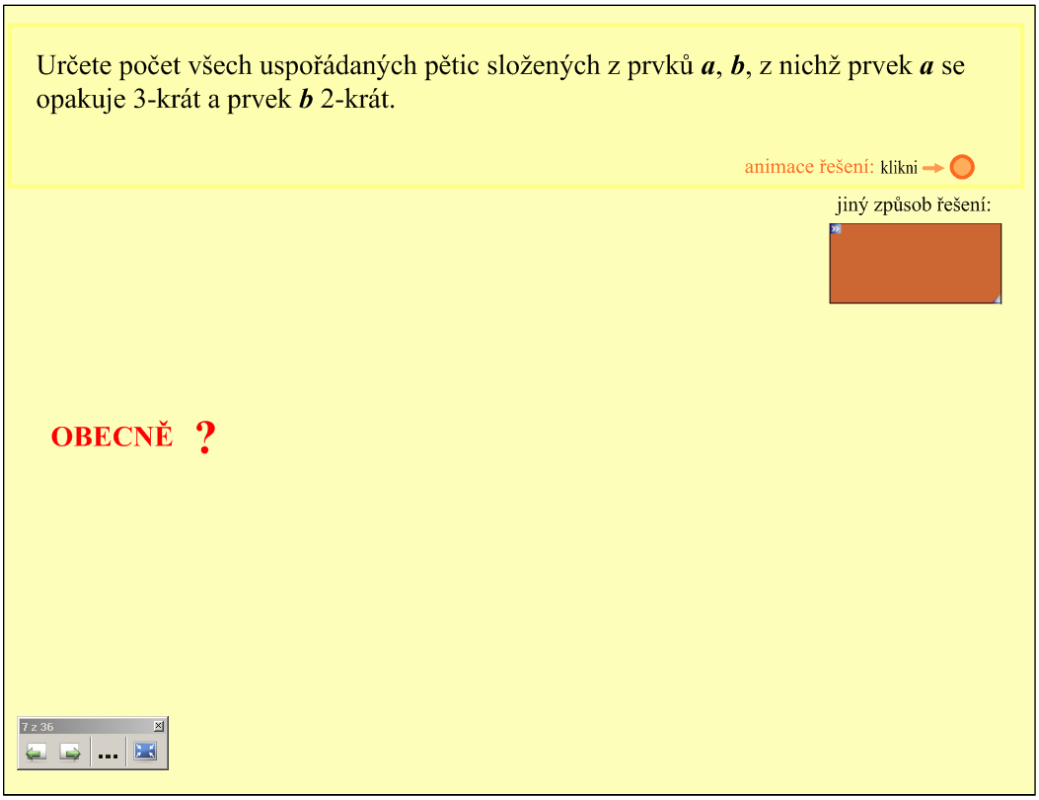


Pokud studenti neměli s řešením předchozí úlohy žádné potíže, i s touto budou rychle hotovi a jejich výsledek bude nejspíš 6!. Neuvědomí si však skutečnost, že obě písmena *K* se chovají stejně. Domnívám se, že pro svůj charakter je tento příklad v kombinatorice s opakování první, u něhož je nutné se zdržet déle a srozumitelně vysvětlit řešení.

V pravém horním rohu je schován pod šestiúhelníkem správný výsledek. Pod oranžovými obdélníky jsou skryty návody k řešení, resp. návod k řešení a náznak druhého možného způsobu řešení. Stačí pouze všechny tři geometrické útvary posunout a objeví se výsledek či pomocný text. Pokud i přes vysvětlení vyučujícím nebude studentům úloha jasná, je možné využít připravenou animaci (klik na oranžový pětiúhelník v levém dolním roku). Animace je zhotovena pouze pro první způsob řešení, tj. $\frac{6!}{2}$. Je možné, že studenti naleznou správný výsledek i jiným způsobem. Jedná se o součin $\binom{6}{2} \cdot 4!$, který určuje nezávisle na pořadí výběr dvou pozic pro písmena *K*. Číslo 4! značí všechna možná pořadí ostatních písmen (2. způsob řešení v pravém dolním rohu).

Je důležité, aby studenti pochopili tuto úlohu oběma způsoby!!!

7. šablona

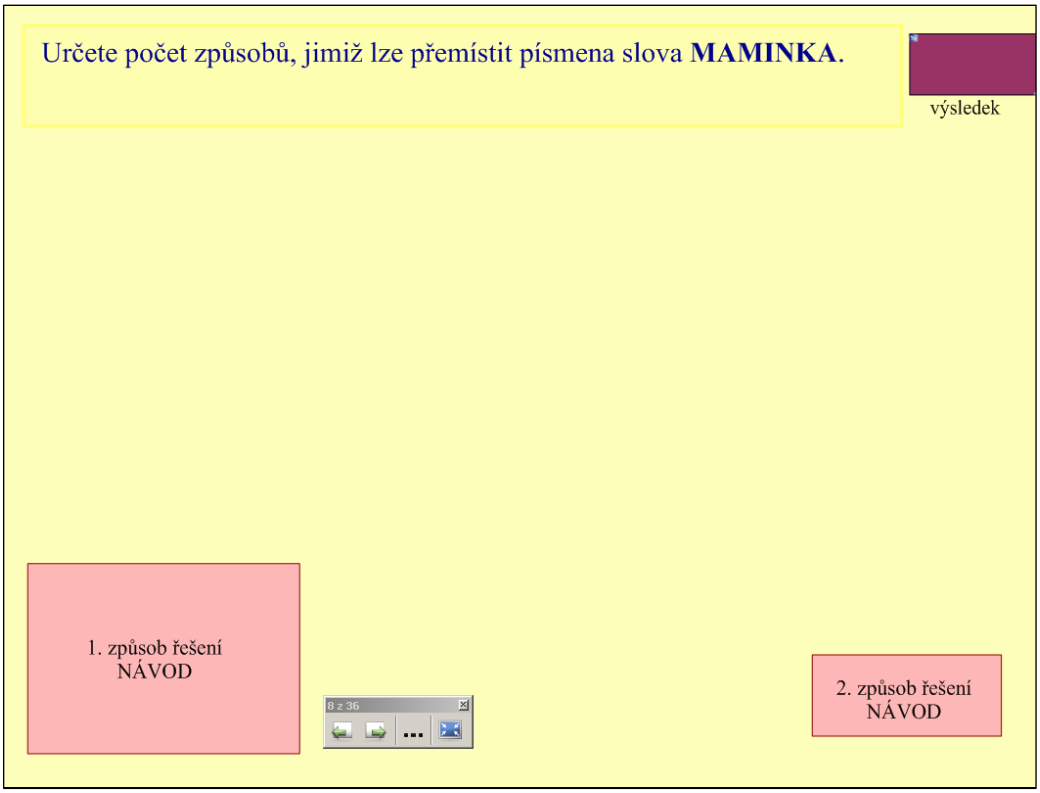


Již v prvé části příručky jsme se zmínili o tom, že studenti mají problémy s úlohami, kde se vyskytují místo čísel písmena. Právě proto jsou takové úlohy důležité a je nutné je do výuky zařazovat. Příklad této šablony je toho důkazem a současně slouží k ověření, zda studenti pochopili úlohu z předchozí šablony. Opět hledáme všechny možné anagramy složené ze tří písmen *A* a dvou písmen *B*. I k této úloze je připravena animace řešení a pod obdélníkem (stačí kliknout) se ukrývá druhý způsob řešení pomocí kombinačního čísla: $\binom{5}{3}$.

Po vyřešení a detailním probrání této úlohy doporučuji rozebrat úlohu obecně. Např. položením následujících otázek:
„A co když budeme mít opět dvě písmena A, B a chceme, aby se nám v anagramech písmeno A vyskytovalo právě n-krát a písmeno B k-krát. Jak bude vypadat řešení?“
„A jak bude vypadat řešení, budeme-li mít 4 různá písmena a chceme, aby se nám každé písmeno opakovalo právě k-krát.?“

Samozřejmě otázek tohoto typu existuje mnoho, stačí jich položit několik, aby si studenti důkladně uvědomili postupy řešení.

8. šablona



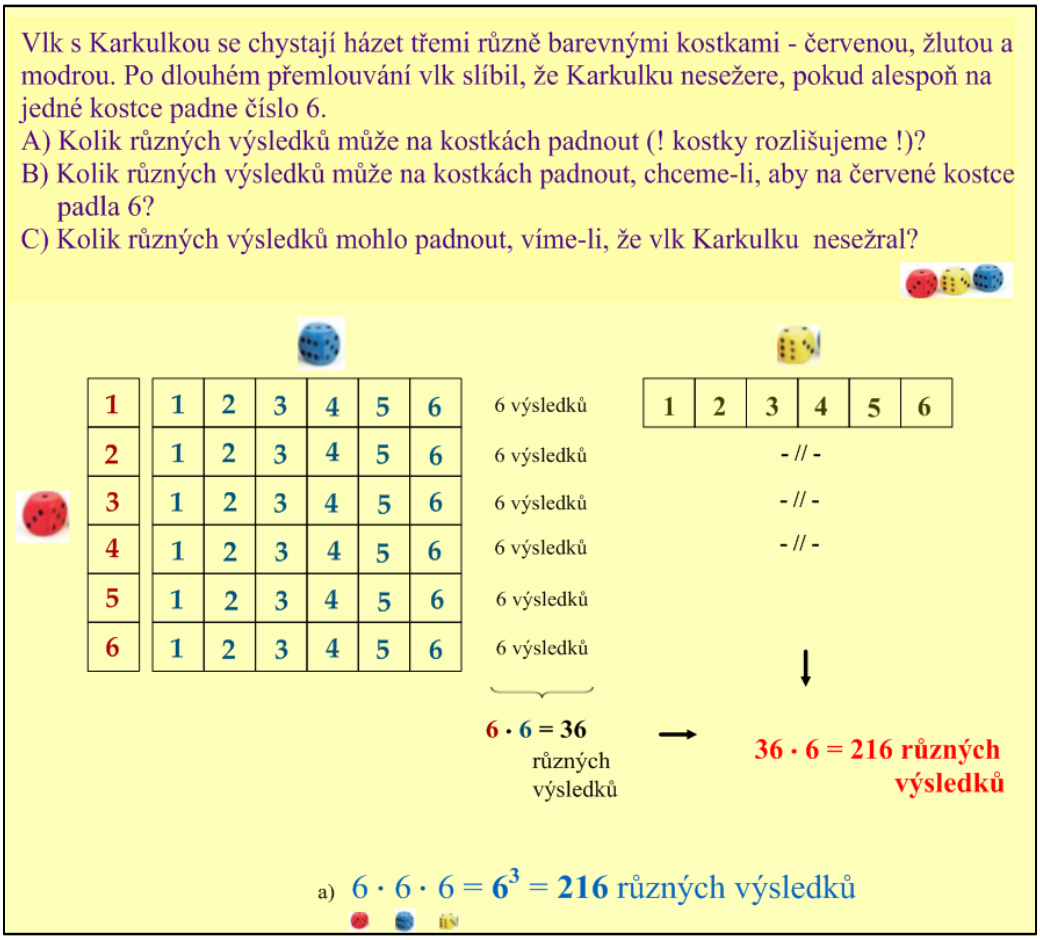
Úloha zaměřená na permutace s opakováním, kterou je možné řešit dvěma způsoby, tj.

* $\frac{7!}{2!\cdot 2!}$,

* $\binom{7}{2}\cdot\binom{5}{2}\cdot 3!$.

Důvodem pro uvedení obou způsobů řešení je skutečnost, že při výskytu složitějších úloh s omezujícími podmínkami bude výhodné využít právě jeden z těchto způsobů řešení. V pravém horním rohu je ukryt správný výsledek (stačí kliknout) a v dolní části šablony jsou oba způsoby řešení, resp. návod, jak řešit (obdélníky posunout jinam).

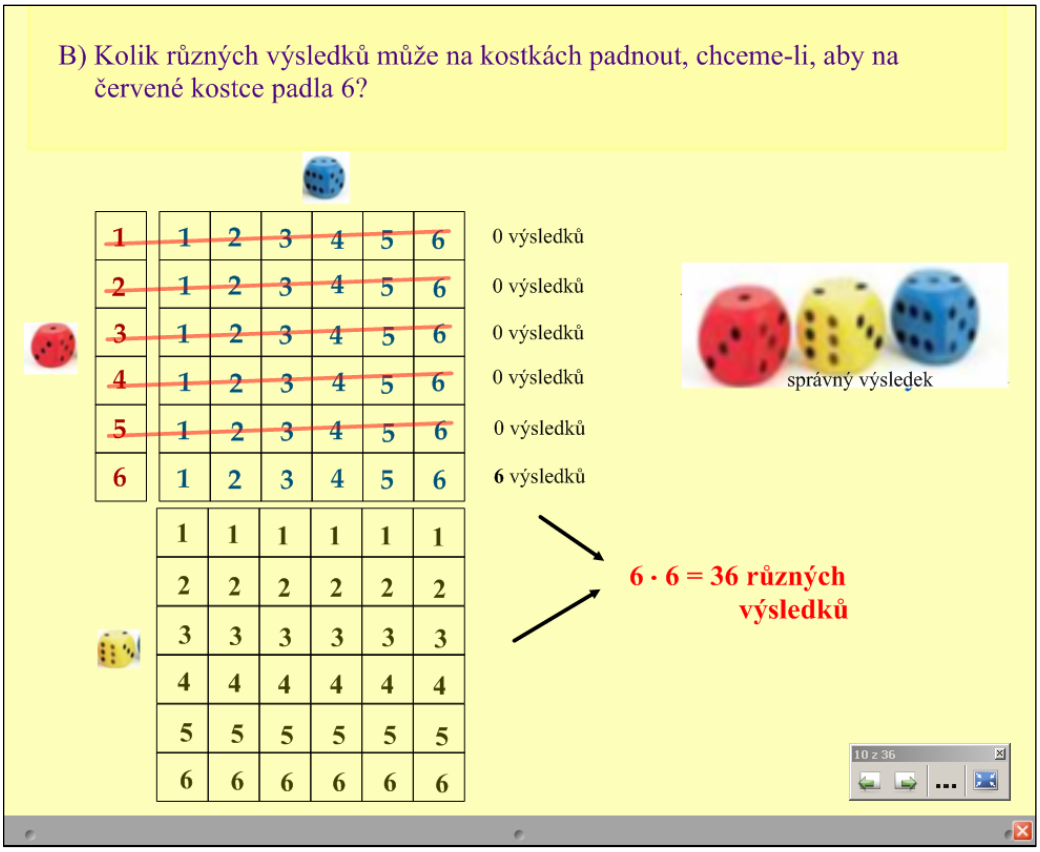
9. šablona



Úloha je rozdělena do třech následujících šablon. Tato šablona obsahuje kompletní zadání a řešení první otázky. Šablona č. 10 obsahuje řešení otázky *B)* a šablona č. 11 je určena pro třetí část příkladu.

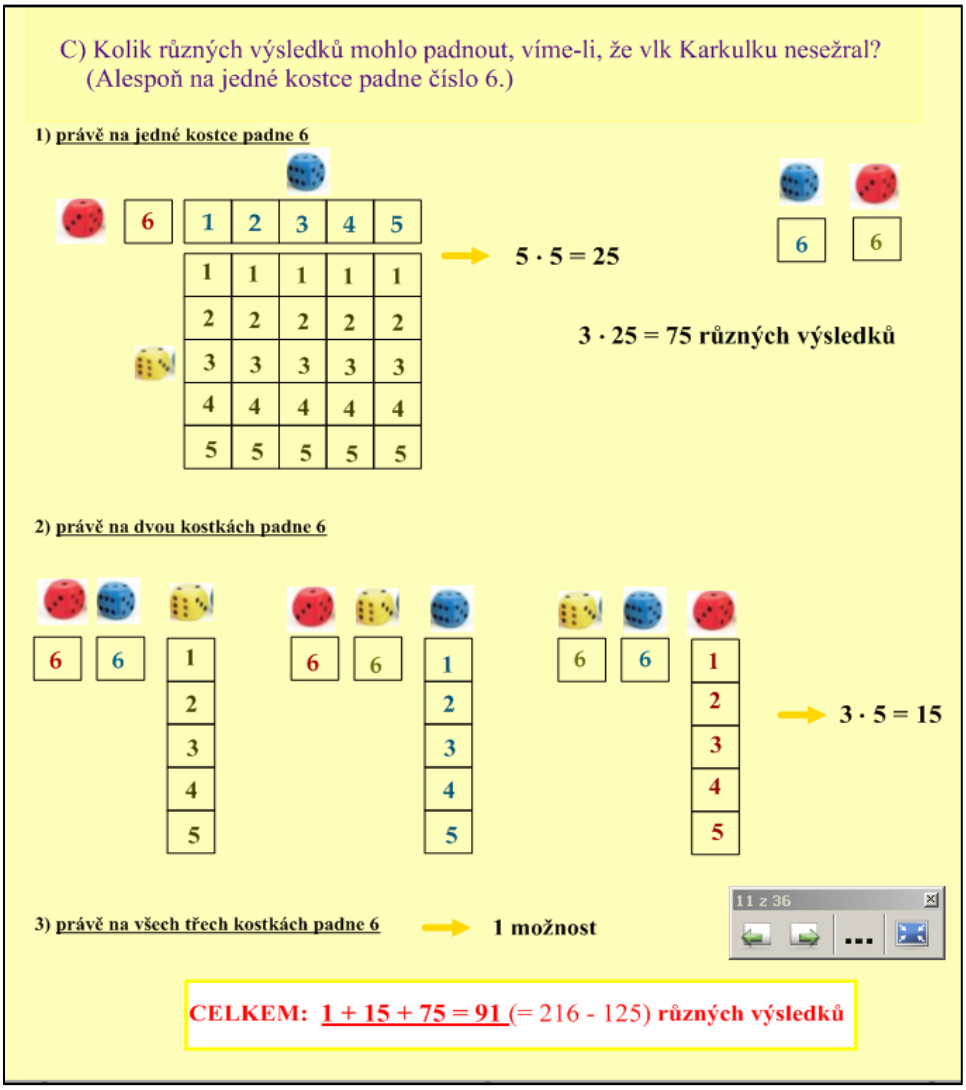
Úlohu, vzhledem k jejímu charakteru (logické uvažování), je vhodné uložit studentům do dvojic - vzájemná diskuse pomůže nalézt správný výsledek. Na šabloně je vše umístěné napevno, nelze s ničím hýbat a obrázek zobrazuje pouze správné řešení. Stínítkem lze postupně odkrývat vše důležité.

10. šablona



Při řešení této otázky lze stejně jako v předchozím případě (otázka *A*) využít kombinatorické pravidlo součinu. Úloha není složitá, ale přesto lze chybovat v nesprávné úvaze, že **pouze** na červené kostce padne číslo šest.
Opět celý obrázek je umístěn napevno, přičemž stínítkem je možné zprvu vše zakrýt. Připravený obrázek zřetelně ukazuje postup řešení, a proto zde není vložena žádná animace.

11. šablona

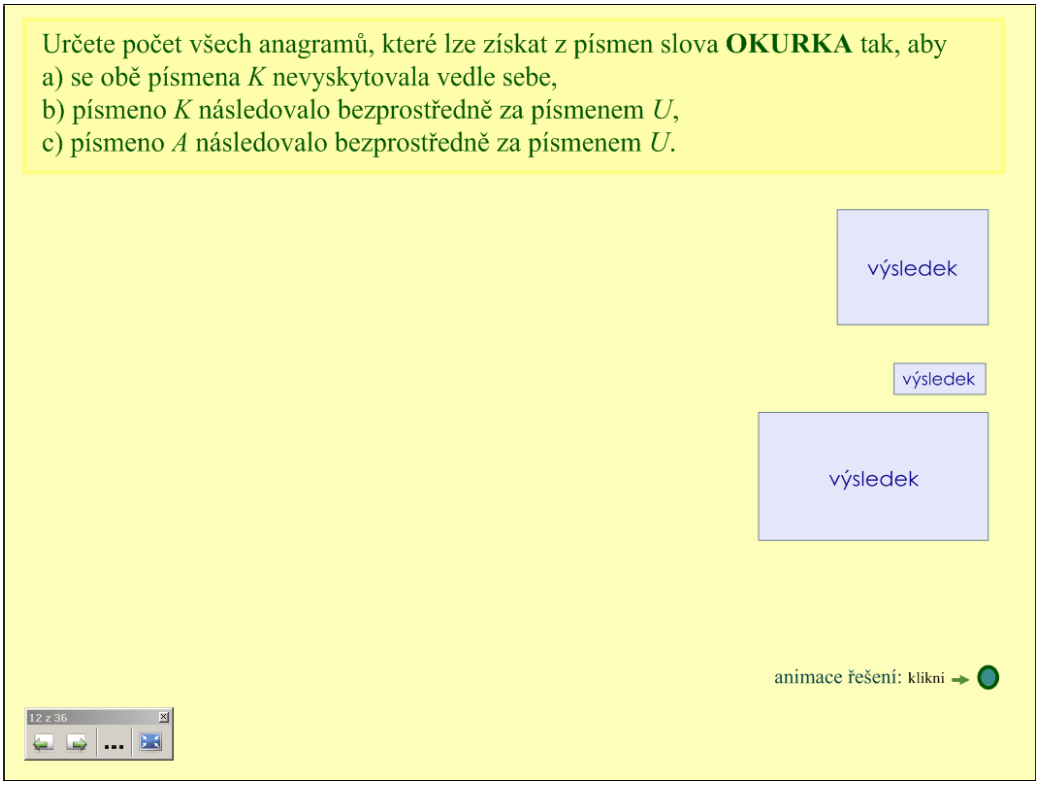


Řešení této třetí otázky je nejobtížnější. Je nutné si nejprve uvědomit, za jakých okolností vlk Karkulku „nesežere“ (pokud alespoň na jedné kostce padne číslo 6).
Nejvhodnější řešení je zpracováno na šabloně, tzn. úlohu je možné rozdělit na tři části podle toho, kolik padne šestek. Obdobně jako i v předchozích případech se obrázkem nedá manipulovat.
Vzhledem k tomu, že studenti nemusí najit pouze zde uvedené řešení, doporučuji před řešením této otázky se nad dalšími správnými možnostmi zamyslet. Pro ilustraci uvádím některá z nich:

* $6^3 - 5^3 = 216 - 125 = 91$ (Od všech možností se odečtou ty, které nepřipadají v úvahu.)
* $(3 \cdot 6^2) - 2 - (3 \cdot 5) = 91$

(Součin $3 \cdot 6^2$ značí počet, kdy na jedné ze tří kostek padne určitě šestka a na ostatních cokoliv, ale protože možnost, kdy na všech kostkách padne šestka počítáme 3krát, je nutné 2 možnosti odečíst. Možnosti, kdy právě na dvou kostkách padne šestka, jsou započítány 2krát, je proto nutné všechny tyto možnosti jednou odečíst, tedy odečíst $3 \cdot 5$ možností.)

12. šablona



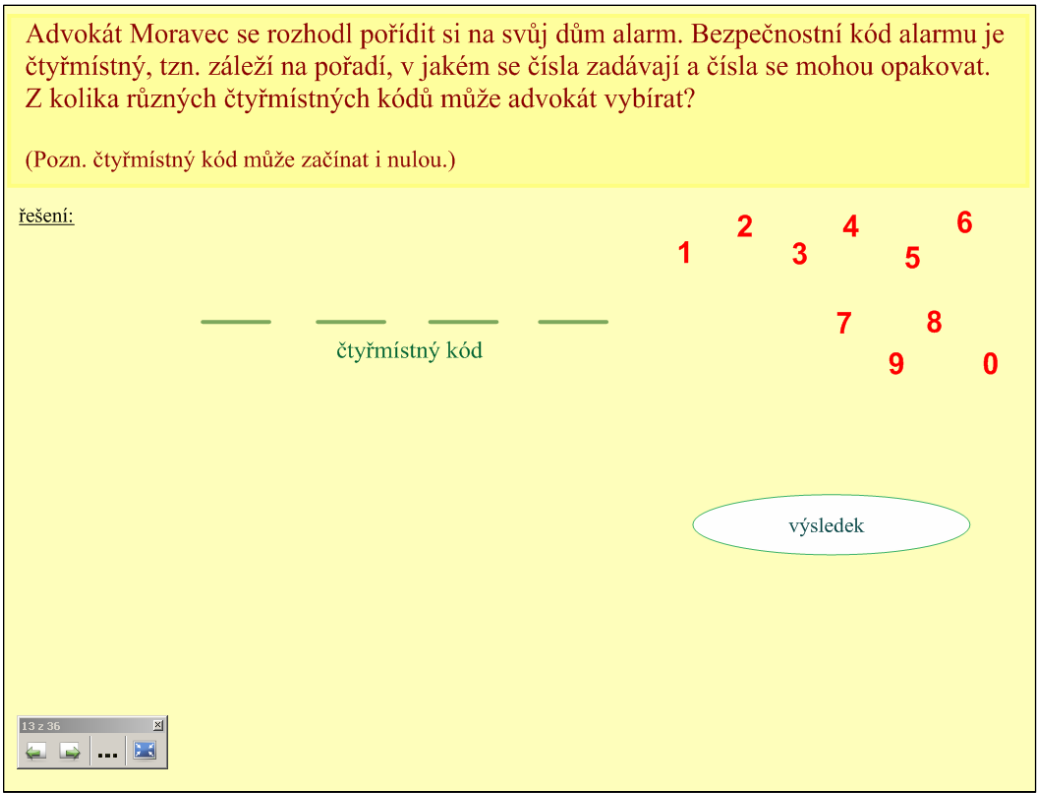
Vracíme se opět k permutacím s opakováním, neboť variace s opakováním nedělají studentům takové potíže jako permutace či kombinace s opakováním. Tento příklad zřetelně prokáže, kdo permutace s opakováním pochopil a kdo nikoliv.
Pod modrými obdélníky jsou schované výsledky.
Pokud řešení není některému ze studentů jasné, lze využít animaci řešení, která je zaměřená na dva nejčastější způsoby řešení. Obsahuje podrobné a srozumitelné postupy řešení všech tří omezujících podmínek:

a) $\frac{6!}{2!} - 5! = \left[\binom{6}{2} \cdot 4!\right] - 5! = 240$ či $4! \cdot \binom{5}{2} = 240$

b) $5! = 120$ (Písmena *U*, *K* zafixujeme jako jedno jediné.)

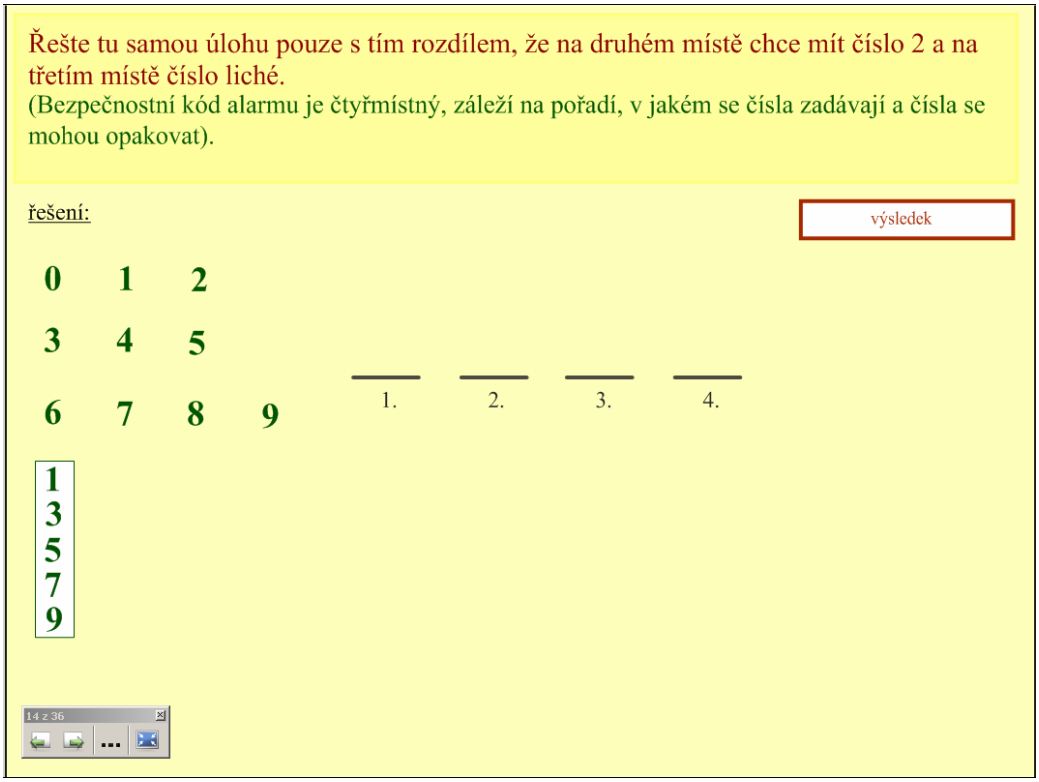
c) $\frac{5!}{2!} = \binom{5}{2} \cdot 3! = 60$

13. šablona



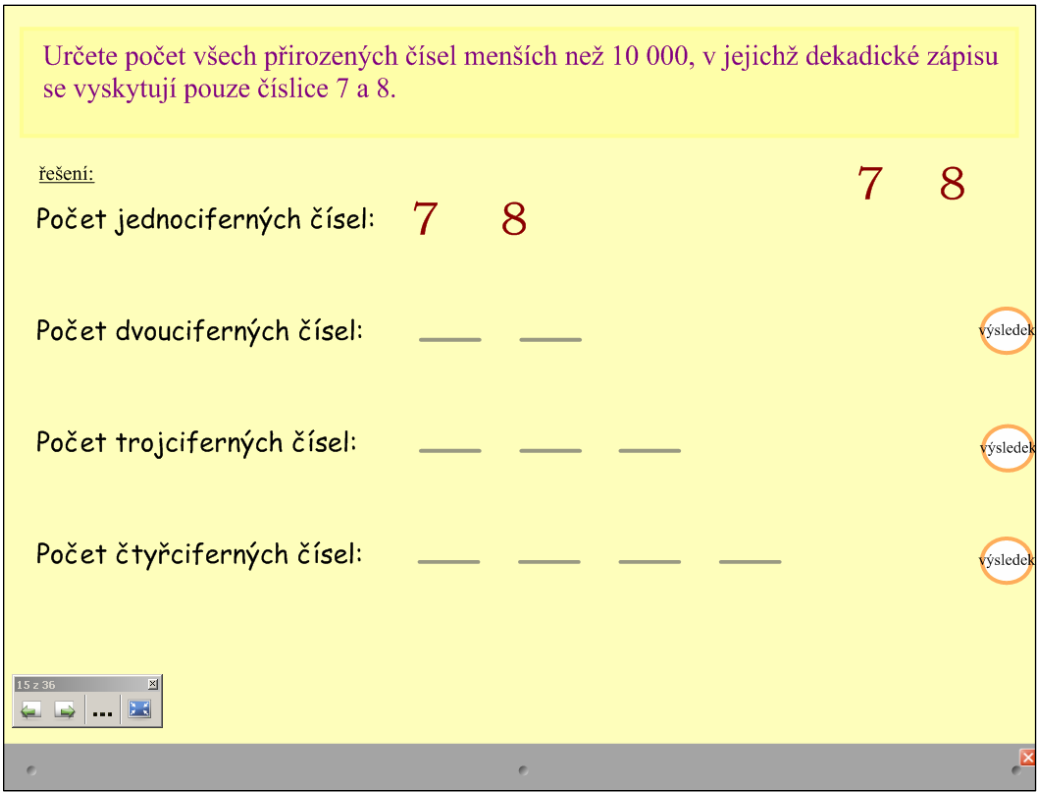
Tento příklad neobsahuje žádnou omezující podmínku a pro svou jednoduchost by neměl studentům činit žádné potíže. Veškeré cifry jsou „naklonované“, a tudíž se dají libovolněkrát použít. Úsečky znázorňující pozice ve čtyřmístném kódu jsou pevně umístěné. Pod bílou elipsou (stačí posunout) je skryt správný výsledek.

14. šablona



Úloha řeší stejný příklad jako na šabloně č. 13. Jsou však dány dvě omezující podmínky – na druhém místě čtyřmístného kódu má stát dvojka a na třetím číslice lichá. Protože lichých číslic je pět, výsledek je roven součinu $10 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 10 = 500$.
I zde jsou jednotlivé cifry „naklonované“ a s pozicemi kódu není možné pohnout. Obdélník, ve kterém jsou svisle znázorněny všechny liché cifry, lze umístit na třetí pozici.

15. šablona



Příklad není složitý, ale přesto je důležité si uvědomit, o jaká čísla se jedná. Roletka je připravena znovu schovat vše kromě zadání – důvodem je nalezení správného výsledku bez jakékoliv nápovědy. Nápověda ve formě obrázku a „naklonovaných“ číslic 7 a 8 (v pravé části) slouží jako pomocná varianta.

16. šablona

Příklad je zaměřen na permutace s opakováním, lze jej však vyřešit i bez těchto znalostí. Cílem je ukázat, že stejný postup řešení jako u anagramů lze uplatnit i u různých čísel. Je důležité nejprve si všechny případné možnosti sestavené z daných čísel vypsat a poté řešit každou zvlášť. U první znázorněné jedničky na šabloně, devítky a jediné trojky je použit „nekonečný klonovač“ pro určení všech základních možností.
Řešení je následující:

1 1 1 9 $\rightarrow$ $\frac{4!}{3!} = 4 = \binom{4}{1}$

1 1 1 3 $\rightarrow$ 4

1 1 9 9 $\rightarrow$ $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6 = \binom{4}{2}$

1 1 9 3 $\rightarrow$ $\frac{4!}{2!} = 12 = \binom{4}{2}\cdot 2!$

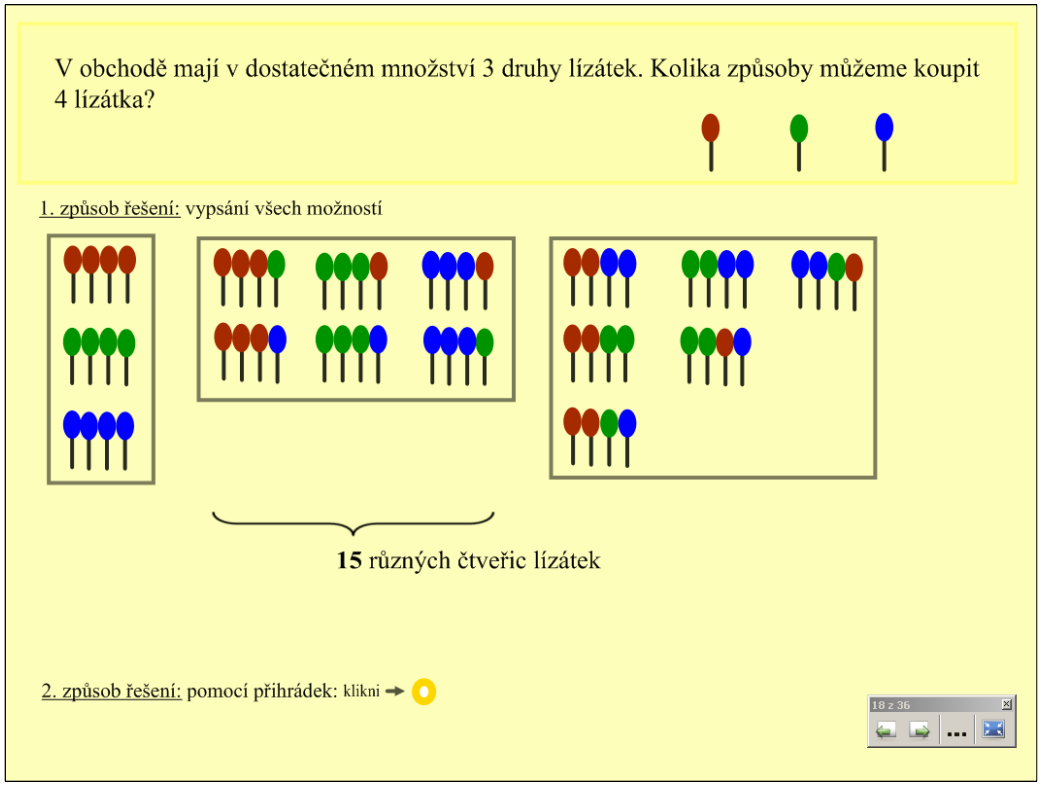
1 9 9 3 $\rightarrow$ 12

Celkem tedy dostáváme 38 různých čísel.
Nápověda k řešení příkladu je skryta v animaci.

17. šablona

Předpokladem správného řešení příkladu je správná úvaha, že rozlišujeme pouze typy bot, tj. každá dívka vybírá z pěti různých typů. Nad jednotlivými úsečkami je vymezen prostor pro zápis všech možností výběru každé dívky a pod bílým obdélníkem je skryt správný výsledek, tedy 5^5. Kromě obdélníku nejde s ničím hýbat, vše je pevně umístěné.

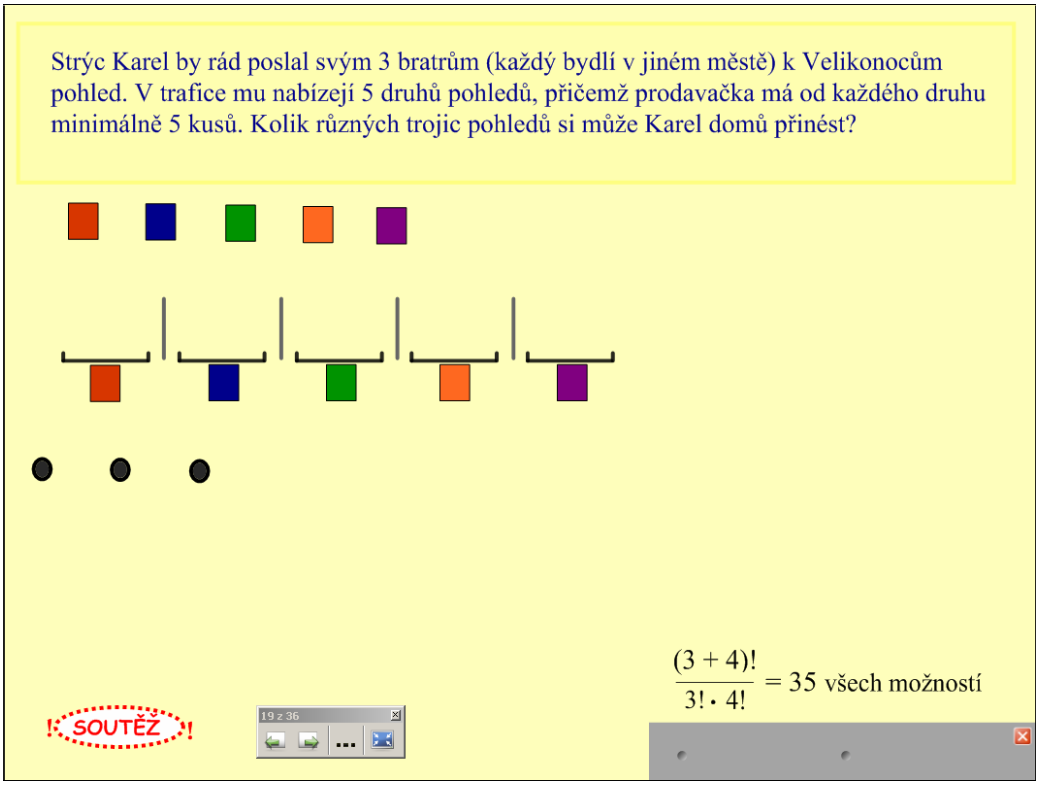
18. šablona



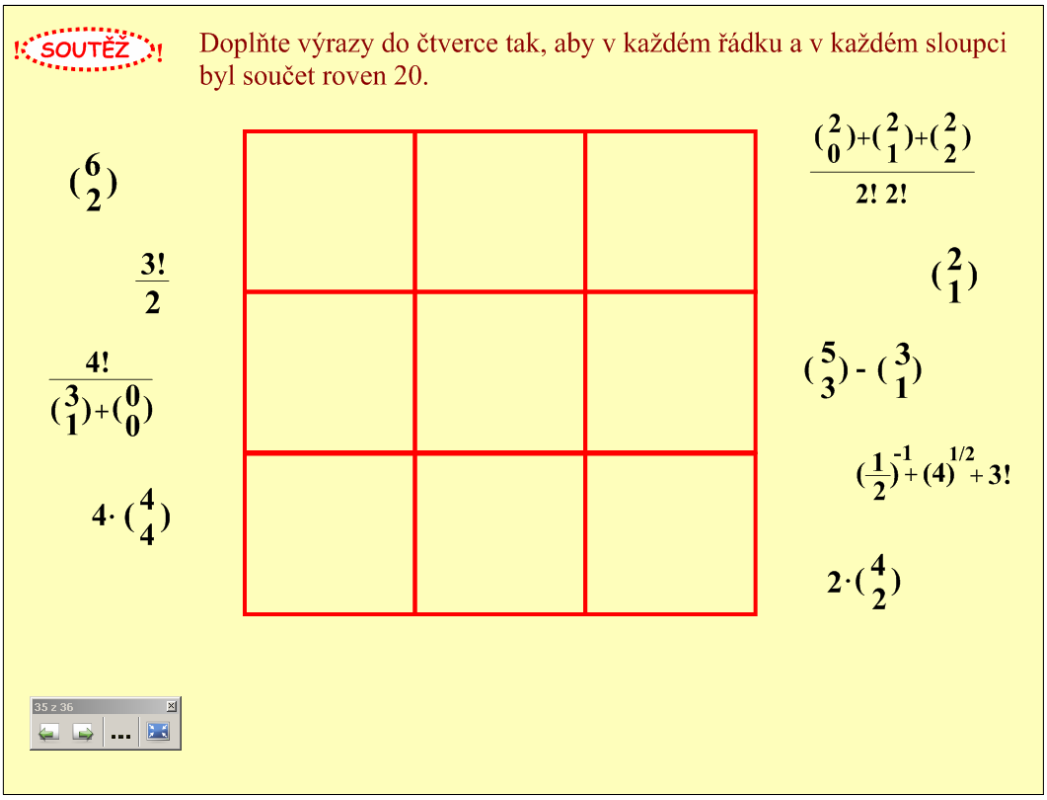
Tato šablona je velice důležitá, neboť obsahuje první z úloh na kombinace s opakováním, které jsou považovány za nejobávanější skupinu prvků. Jedná se o jeden z typických příkladů.

V tomto případě je ideální nejprve všechny možnosti si vypsat a zjistit, kolik existuje všech možností výběru. Na výčtu všech možností lze ověřit, do jaké míry se studenti naučili systematicky postupovat. Při použití stínítka můžeme skrýt všechny možnosti řešení. Přiložená animace nám umožní jednoduchým způsobem vysvětlit nový způsob řešení, tzv. přihrádkovou metodou. Vzhledem k tomu, že tato metoda usnadňuje výpočet u celé řady úloh, je nutné pro její pochopení a zvládnutí ji věnovat dostatek času.

19. šablona



Formou přihrádkové metody můžeme řešit i tento velmi podobný příklad. Jednotlivé druhy pohledů jsou odděleny přepážkami (černé svislé úsečky), které jsou pevně dané. Třemi černými puntíky lze pro názornost jednotlivých variant pohybovat.
Pro odreagování poslouží následující soutěž.



Inspirací pro tuto soutěž je magický čtverec. Pracovat může každý sám v lavici či ve dvojicích. Kdo bude s příkladem první hotov, může ostatním na interaktivní tabuli své řešení ukázat.
Možností, jak vložit dané výrazy do čtverce, je samozřejmě více.

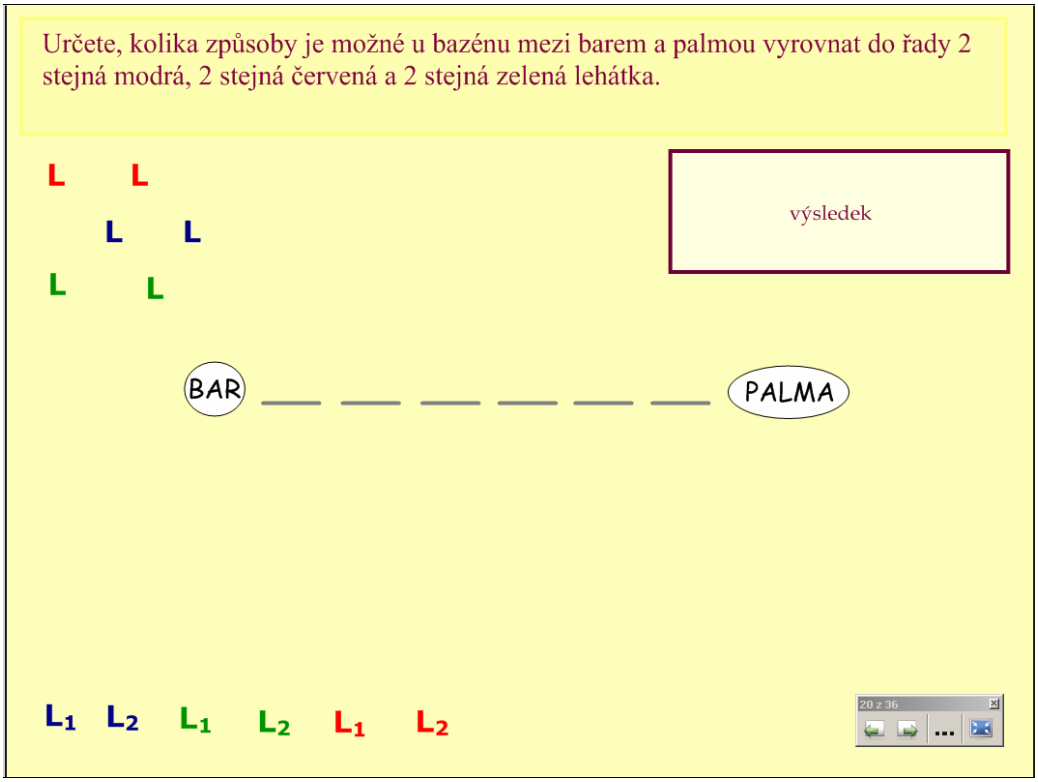
Jedno z možných řešení spolu s výpočtem každého výrazu:

$$\binom{6}{2}=15 \qquad \binom{2}{1}=2 \qquad \frac{3!}{2}=3$$

$$\frac{\binom{2}{0}+\binom{2}{1}+\binom{2}{2}}{2!\cdot 2!}=1 \qquad 2\cdot\binom{4}{2}=12 \qquad \binom{5}{3}-\binom{3}{1}=7$$

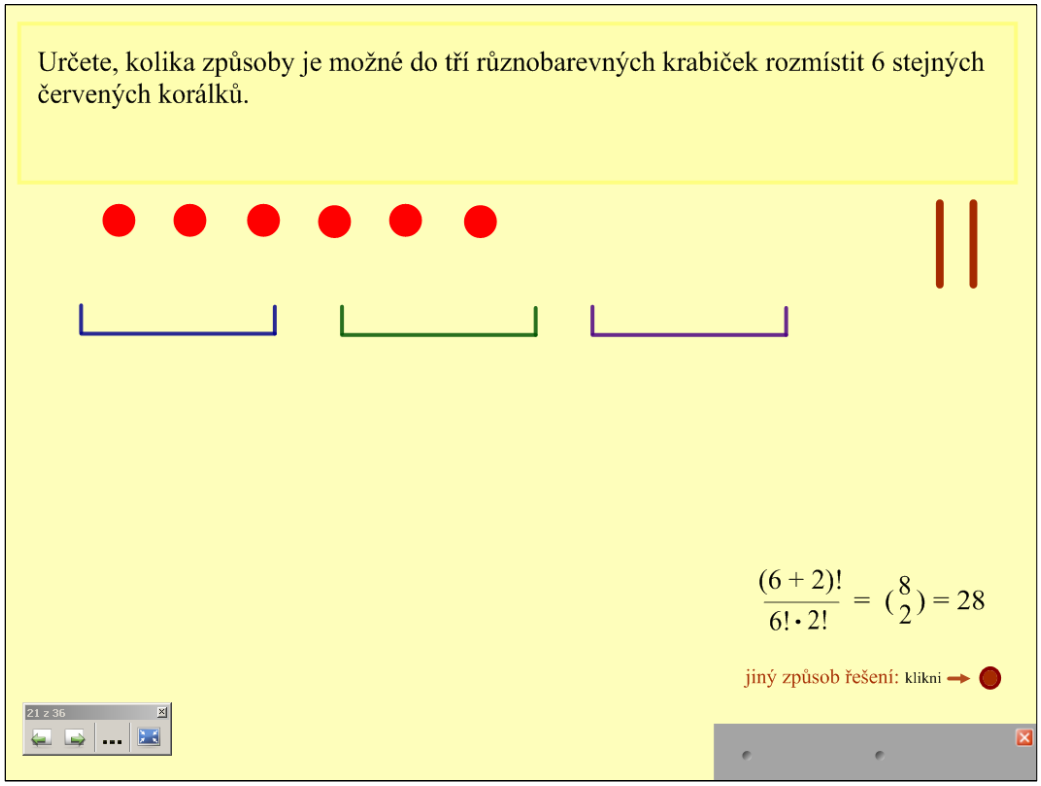
$$4\cdot\binom{4}{4}=4 \qquad \frac{4!}{\binom{3}{1}+\binom{0}{0}}=6 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+4^{\frac{1}{2}}+3!=10$$

20. šablona



Přestože je úloha zaměřená na permutace s opakování, lze ji vyřešit i pomocí kombinačních čísel. Úsečky znázorňující jednotlivé pozice pro lehátka mezi barem a palmou jsou pevně dané a s jednotlivými lehátky, resp. barevnými písmenky lze pohybovat.
Správný výsledek oběma způsoby je umístěn pod bílým obdélníkem s nadpisem „výsledek“ – stačí pouze posunout níže.

21. šablona



Aby studenti nevyšli ze cviku a na přihrádkovou metodu nezapomněli, je zde další úloha zaměřená na kombinace s opakováním. Jak s červenými korálky, tak se dvěma hnědými svislými úsečkami (přepážkami) lze hýbat; se třemi krabičkami – modrou, zelenou a fialovou - však nikoliv. Pomocí těchto předpřipravených objektů by studenti měli přijít na správný výsledek, který by měl být v pravém dolním rohu zprvu schován pod stínítkem.

Přihrádková metoda samozřejmě není jediný způsob, jak úlohu řešit. Další způsob řešení formou připravené animace je skryt pod hnědým kolečkem vpravo dole. Nejprve jde o vypsání všech možností, které připadají v úvahu pro případ, kdy krabičky nerozlišujeme. V dalších krocích řešíme jednotlivé možnosti pro zadané různobarevné krabičky.

22. šablona

Pro odlehčení následuje úloha vskutku triviální. Stačí využít kombinační pravidlo součinu a výsledek 4^6 je „na světě“. Podle mého názoru se jedná o několikavteřinovou záležitost. Žárovky jsou pevně dané a čtyři barevné puntíky - znázorňující barevné osvětlení - jsou „naklonované“, lze s nimi hýbat a přiřazovat je k jednotlivým žárovkám. V pravém dolním rohu je opět skryt správný výsledek.

23. šablona

Je dána množina M. Určete počet všech podmnožin množiny M.

a) M = {1}

b) M = {1, 2,}

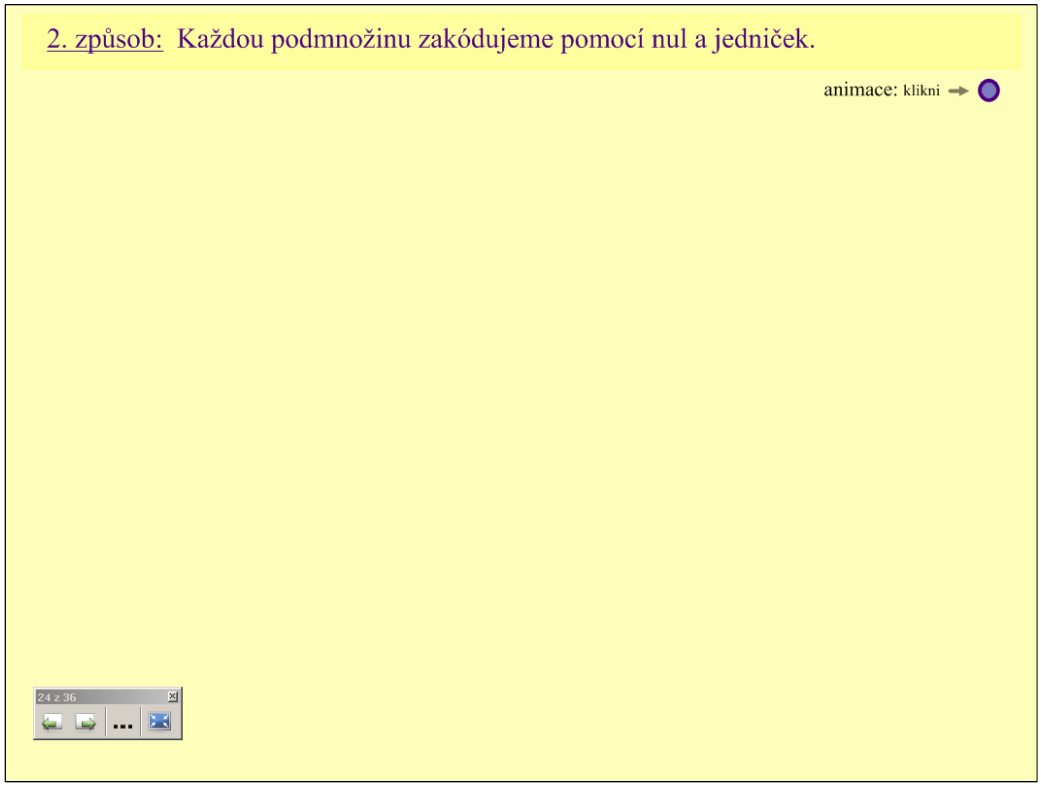
c) M = {1, 2, 3}

d) M = {1, 2, 3, 4}

e) M = {1, 2, 3, ..., k}

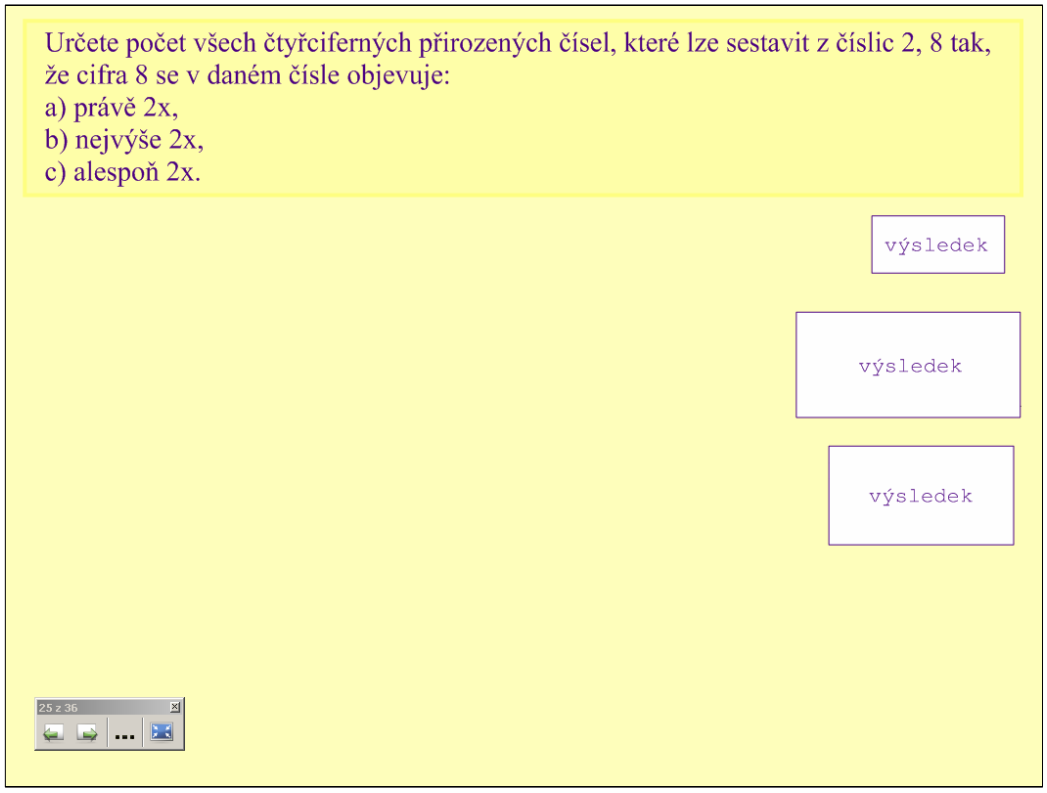
Z této a následující šablony by studenti měli pochopit, jak je možné kombinatoricky vypočítat počet všech podmnožin *n*-prvkové množiny, přičemž by studenti neměli znát obecný vzorec předem, ale na řešení by se měli pokusit přijít sami. Začíná se tím nejjednodušším, tj. jednoprvkovou, dvouprvkovou, tříprvkovou, resp. čtyř prvkovou množinou, přičemž cílem je ke každé množině uvést počet všech podmnožin. Předpokládám, že studenti si budou všechny podmnožiny vypisovat či použijí kombinační čísla. Důležité je nezapomenout si vždy konečné číslo zapsat a na základě prvních čtyř výsledků následně odvodit obecný vzorec. Ze své zkušenosti mohu říci, že s tím studenti nemívají potíže.
Znají-li studenti již daný vzorec, může se přejít k další důležité šabloně.

24. šablona



Pomocí této šablony by měl vyučující předložit studentům další způsob řešení. Buď může využít celou volnou plochu pro vysvětlení či využít velmi srozumitelnou a jasnou animaci řešení za pomoci kombinačních čísel, a nebo pomocí kódů složených z nul a jedniček. Nejprve je řešení prezentováno na tříprvkové množině, neboť pro studenty je daleko jednodušší pracovat s čísly než obecně s písmeny. Poté jsou tytéž způsoby řešení použity na n-prvkové množině.

25. šablona



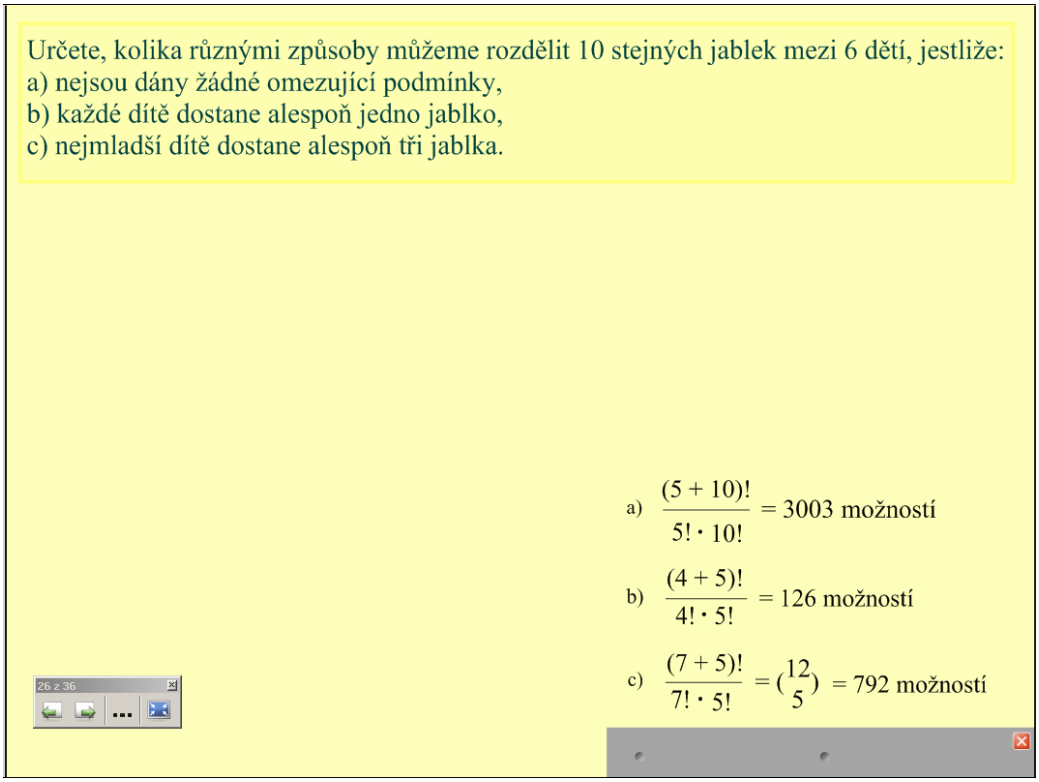
Tento příklad patří k těm jednodušším, neboť studenti již mnohokrát určovali počet přirozených čísel. Mají zde najít počet všech čtyřciferných přirozených čísel, přičemž jsou opět dány jisté omezující podmínky.
Pod obdélníky jsou schovány správné odpovědi. Na správný výsledek je možné opět přijít několika způsoby:

a) $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = \binom{4}{2}$

b) $1 + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 1 + \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$

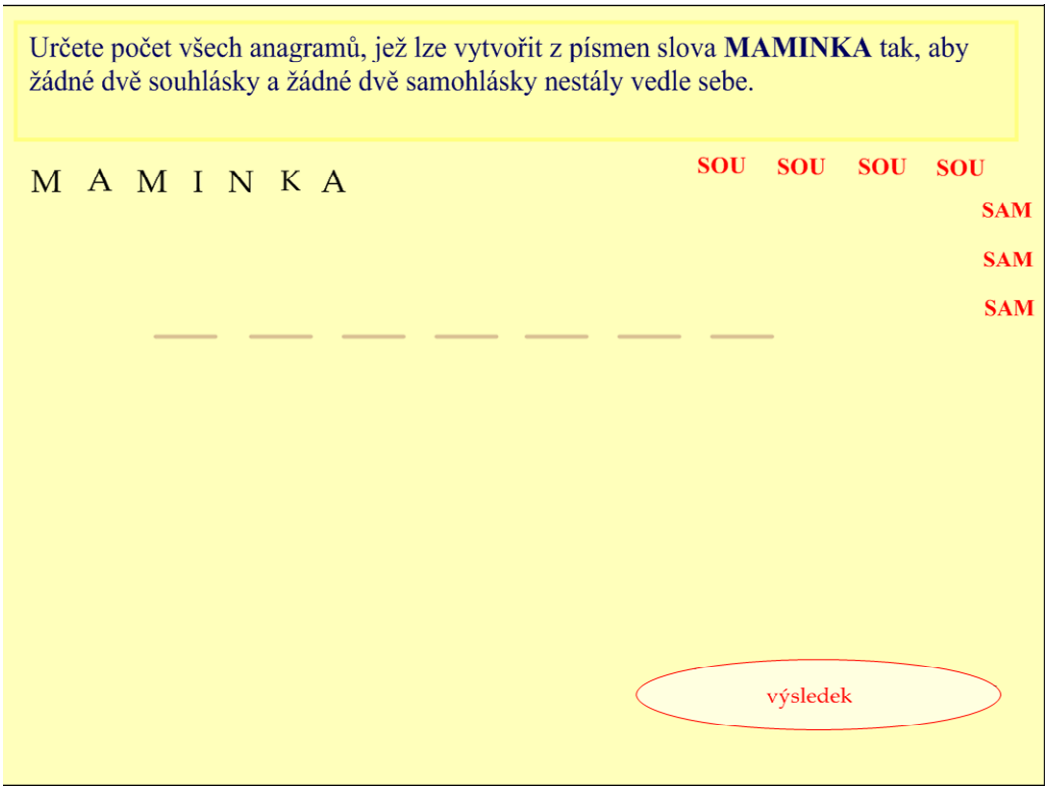
c) $1 + \frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 2^4 - 1 - 4$

26. šablona



Příklad je zaměřen na přihrádkovou metodu. Předem je nutné stínítkem skrýt veškerá řešení v pravé části šablony. U této úlohy je vhodné dát studentům určitý čas na přemýšlení, např. ve dvojicích.

27. šablona

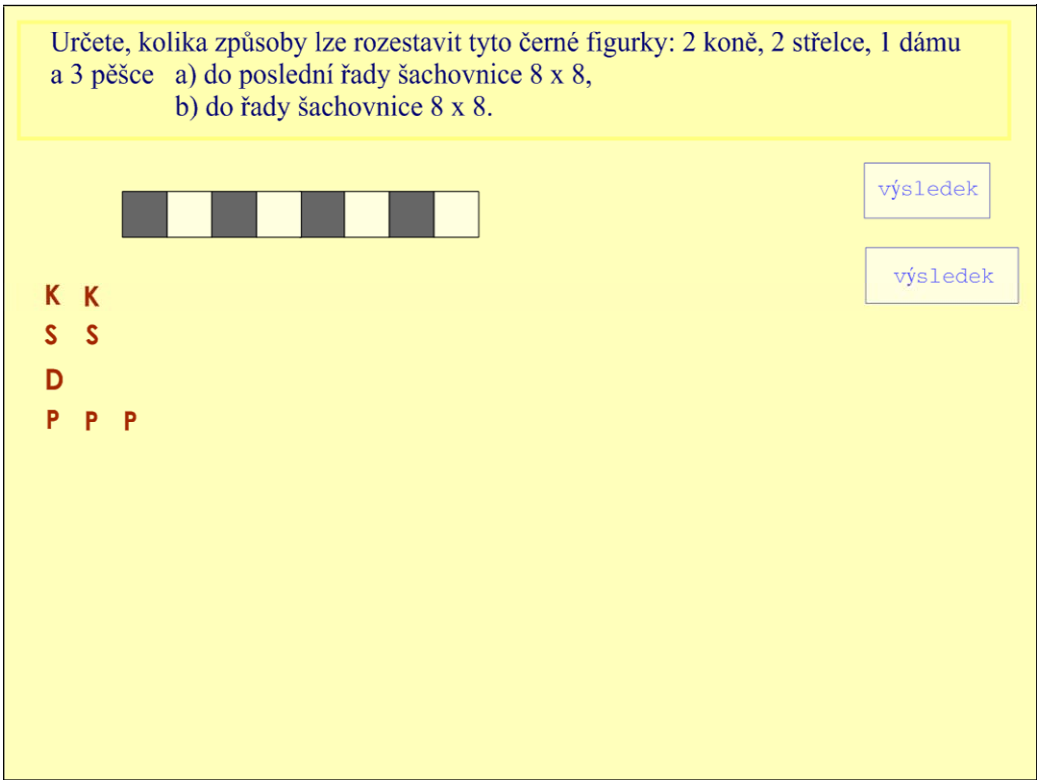


I když příklad nevypadá na první pohled složitě, rozhodně nepatří k jednoduchým. Studenti si musí uvědomit jednak, že ve slově se vyskytují dvě písmena *M* a *A*, a jednak, že anagramy musí začínat souhláskou, tzn. pozice pro samohlásky a souhlásky jsou jasně dané. Jen tak bude splněna podmínka, že žádné dvě souhlásky a žádné dvě samohlásky nebudou stát vedle sebe.
Sedm pevně umístěných úseček představuje pozici v anagramu a s jednotlivými písmeny slova MAMINKA či se slabikami „SOU“ (souhláska) a „SAM“ (samohláska) se dá pro názornost pohybovat. Správný výsledek je uveden vpravo dole. Předkládám dva způsoby řešení:

* $\frac{4!}{2!} \cdot \frac{3!}{2!}$

* $\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot \binom{3}{2}$

28. šablona



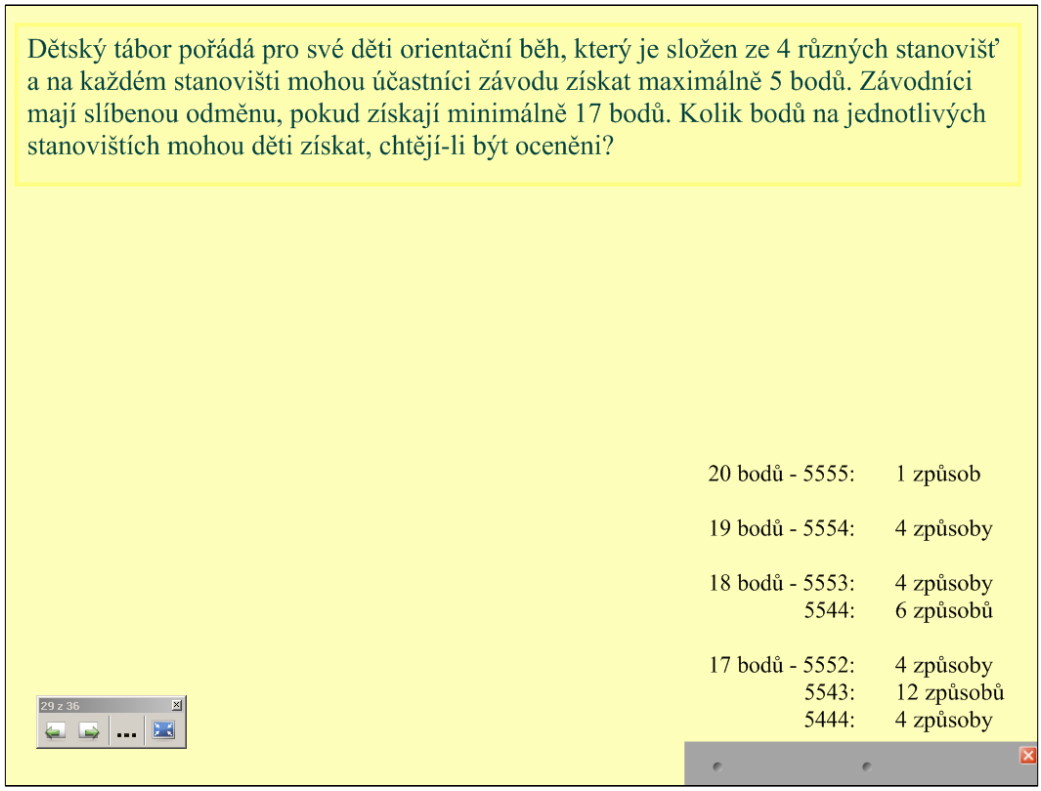
V první části je dána řada, do které se má umístit 8 figurek – 2 koně (*K*), 2 střelce (*S*), 1 dámu (*D*) a 3 pěšce (*P*). A opět se dá řešit dvěma způsoby:

$$* \quad \frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}$$

$$* \quad \binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{1}$$

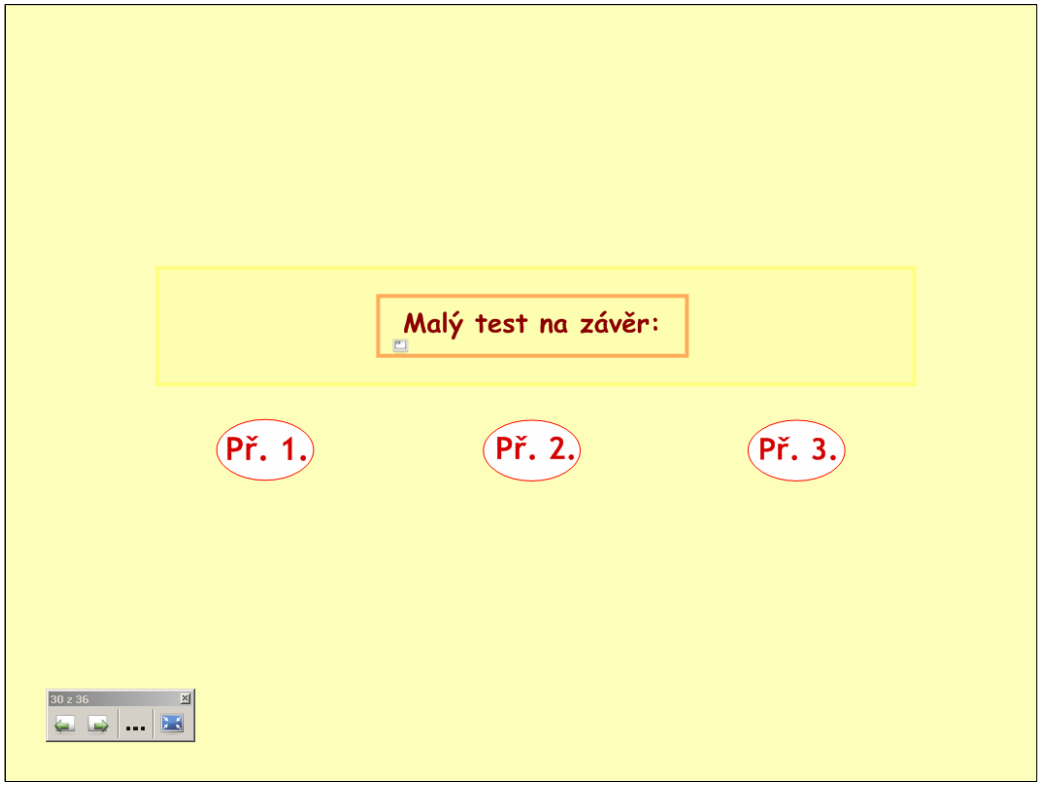
Řada šachovnice je vložena napevno, kdežto s jednotlivými písmeny - představujícími šachové figurky - se dá pohybovat a vkládat je do šachové řady.
Ve druhé části úlohy stačí výsledek z první části vynásobit 8, tj. 8 řadami, které připadají v úvahu. Domnívám se, že zde jakákoliv animace řešení již je zbytečná.

29. šablona



Tato úloha se nedá vyřešit během několika vteřin. Studenti si musí uvědomit, jaká hodnocení připadají v úvahu (systematicky si je vypsat) a pak rozebrat každou možnost zvlášť na základě čtyř různých stanovišť. Úloha je vhodná do dvojic.
V šabloně je uvedeno řešení, které by mělo být samozřejmě speciální „roletkou“ zprvu zakryto. Domnívám se, že v tomto případě není k řešení zapotřebí obrázků ani animace, protože se nejedná o složitý příklad.

30. šablona



Na závěr celého kurzu kombinatoriky s využitím interaktivní tabule je připraven malý test obsahující 3 úlohy. Stačí kliknout na jednotlivé příklady a ukáže zadání. Domnívám se, že všechny tři úlohy jsou jakýmsi shrnutím celé kombinatoriky samozřejmě bez binomické věty, principů inkluze a exkluze, Dirichletova principu.
Záleží na každém vyučujícím, zda test pojme soutěživě – ať už jednotlivě či skupinově – nebo standardně, tj. jednotlivých příkladů se účastní celá třída dohromady.

První testová úloha je rozdělena na tři části, druhá a třetí na části čtyři. Ke každé otázce je vpravo vložena správná odpověď. Před zahájením práce je proto nutné jednotlivé výsledky vyučujícím přeházet, neboť cílem žáků je každou část vyřešit zvlášť a předložené výsledky správně přiřadit k jednotlivým otázkám.

Opětovném kliknutím na označení daného příkladu

se vrátíme zpět na úvodní stránku testu, tj. na 30. šablonu.

Př. 1.

Paní učitelka vybírá z 10 dívek a 8 chlapců 4 žáky.

- Kolik existuje možností výběru pro 4 různé funkce (např. nástěnkář, šatnář, ...), víme-li, že každý vybraný žák bude zastávat právě jednu ze čtyř funkcí. $18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15$ $\binom{18}{4} \cdot 4!$
- Kolik existuje možností výběru pro 4 různé funkce, zajímá-li nás pouze to, zda danou funkci zastává dívka či chlapec. 2^4
- Kolik existuje možností výběru, zajímá-li nás pouze vybraná skupina (jací žáci jsou vybráni). $\binom{18}{4}$

31 z 36

Př. 2.

Kolika způsoby můžeme mezi 4 dívky rozdat

a) 4 stejné míčky, $\frac{7!}{3!\,4!}$

b) 4 různé míčky, 4^4

c) 4 různé míčky tak, aby každá dostala právě jeden, $4!$

d) 4 stejné míčky tak, aby každá dostala právě jeden. 1

32 z 36

Př. 3.

Určete, kolika způsoby můžeme rozdat:

a) 3 stejné kuličky do 4 různých krabiček, $\frac{6!}{3!\,3!}$ $\quad 4 + 12 + 4$

b) 3 stejné kuličky do 4 stejných krabiček, 3

c) 3 různé kuličky do 4 různých krabiček, $4 + (4 \cdot 3) \cdot 3 + 4 \cdot 3!$

$4 \cdot 4 \cdot 4$

d) 3 různé kuličky do 4 stejných krabiček. 5

33 z 36

4 SEZNAM SLOVNÍCH ÚLOH PRO STUDENTY

4.1 Kombinatorika bez opakování

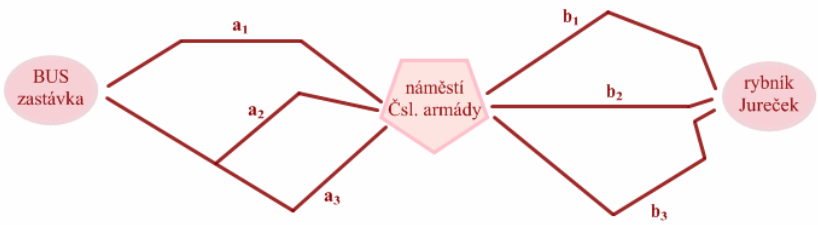
1) Děti z Hudební školy Skřivánek, mezi nimiž byla i dvojčata Dita a Zita, psaly v rámci hudební nauky písemnou práci z not. Kolik možností oznámkování mohla dvojčata od učitelky obdržet, jestliže víme, že dvojčata nedostala stejnou známku? (Kolik dvojic různých známek připadá v úvahu?)
2) Ve školní jídelně jsou dnes v nabídce tato jídla:

   Polévka: - slepičí vývar
   - zeleninová, krémová

   Hlavní jídlo: - pečené kuře s rýží
   - plněný paprikový lusk, rajská omáčka, houskový knedlík
   - kapustový karbanátek, bramborová kaše

   Salát: - rajčatový
   - zelný

   Kolika způsoby si můžete vybrat oběd (kolik existuje různých obědů), má-li obsahovat polévku, hlavní jídlo a jeden salát?
3) Parádnice Vlasta si vzala na dovolenou k moři 5 různě barevných tílek a 3 různé sukně (1 minisukni, 1 sukni ke kolenům a jednu dlouhou sukni). Kolika způsoby si může obléknout tílko a sukni, aby každé vypadala jinak?
4) Na šachovnici 8 x 8 umístěte obě věže (tzn. černou a bílou) tak, aby černá stála na černém políčku, bílá na bílém a aby jedna nevyhodila druhou, tzn. obě věže se nesmí nacházet ve stejném řádku ani ve stejném sloupci.
5) Určete počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.
6) Kolika způsoby se může dostat Hugo z autobusové zastávky k rybníku Jureček, může-li jít pouze po vyznačených cestách a má-li se zastavit na náměstí Čsl. Armády pro kamaráda Cyrila?



   Kolika způsoby se může dostat Hugo k rybníku Jureček a zpět na autobusovou zastávku, jsou-li předchozí podmínky zachovány a má-li jít zpátky stejnou cestou jako k rybníku?

   Kolika způsoby se může dostat Hugo k rybníku Jureček a zpět na autobusovou zastávku, jsou-li podmínky zachovány a má-li jít zpátky po jiných cestách než šel k rybníku?
7) Čtverec (ozn. A) o straně 3 cm je rozdělen na 9 stejných čtverců o straně 1 cm. Určete, kolik je v daném čtverci A čtverců.
8) Maminka koupila svým dcerám Janě, Petře a Lence 3 různé míče. Kolika způsoby je může mezi dcery rozdělit tak, aby každá dostala právě jeden?
9) Určete počet všech trojciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se může vyskytovat pouze číslice 1, 2, 3, 4 a každá nejvýše jednou. Poté všechna čísla vepište do dané tabulky.

10) Určete počet všech nejvýše trojciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se může vyskytovat pouze číslice 1, 2, 3, 4 a každá nejvýše jednou?
11) Paní ředitelka jisté školy slíbila studentům, že na Den dětí si mohou studenti vytvořit svůj ideální rozvrh, který má obsahovat 6 různých hodin. Žáci si tedy měli vybrat šest nejoblíbenějších předmětů a z nich pak sestavit daný rozvrh. Sestavte si i vy ideální rozvrh a určete, kolik různých rozvrhů z vybraných předmětů je možné vytvořit? Kolik různých rozvrhů můžete vytvořit, má-li se vyučovat na první hodině TV?
12) Paní učitelka Spravedlivá se rozhodla, že příští hodinu vyzkouší poslední 4 studentky – Jáju, Páju, Dádu a Káju, které u ní nemají ještě žádnou známku. Určete počet všech možných pořadí, v jakém si je paní učitelka může volat k tabuli.
13) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují pouze číslice 1, 2, 3, 4, 5, každá nejvýše jednou. Kolik z nich je dělitelných
    a) dvěma,
    b) třemi,
    c) šesti.
14) Čtyři sourozenci hrající na různé hudební nástroje se připravují na vystoupení před svými rodiči a příbuznými. Určete:
    a) kolik existuje různých pořadí, jak děti mohou vystoupit?
    b) kolik existuje různých pořadí, jak děti mohou vystoupit, chce-li Pepa vystupovat jako první?
    c) kolik existuje různých pořadí, jak děti mohou vystoupit, chce-li Pepa vystupovat jako první a Klárka jako poslední?
    d) kolik existuje různých pořadí, jak děti mohou vystoupit, chce-li Vlastík vystupovat těsně po Pepovi?
    e) kolik existuje různých pořadí, jak děti mohou vystoupit, chce-li Vlastík vystupovat těsně po Pepovi a Pepa jako první?
15) Babička Boženka slíbila své vnučce vysokoškolačce, že jí k narozeninám pošle na účet 1000 Kč na přilepšenou. Bohužel si však nezapamatovala celé číslo účtu. Věděla pouze, u které banky má vnučka účet, číslo že je desetimístné a že začíná 25 (v tento den se babička narodila), končí 3 (tolik má vnoučat), číslo účtu obsahuje dvojčíslí 78 a každá cifra se objevuje pouze jednou. Kolik různých účtů těmto podmínkám vyhovuje?
16) Pan Novák má v jedné poličce své knihovny 10 různých knih a 5 dílů Ottova slovníku naučného. Kolika způsoby může své knihy přemístit v poličce tak, aby všechny díly slovníku stály pohromadě vedle sebe od prvního do pátého dílu (zleva doprava)? Kolik existuje možností umístění, má-li ještě červená knížka stát úplně vpravo?
17) Jára si při matematické olympiádě nevěděl rady s následující úlohou.
    „Určete, kolika způsoby je možné přemístit písmena slova BUMERANG tak, aby:
    a) utvořené přesmyčky (anagramy) začínaly písmenem M,
    b) nějaká skupina po sobě jdoucích písmen utvořila slovo GEN,
    c) nějaká skupina po sobě jdoucích písmen utvořila slova GEN, BUM v libovolném pořadí.“
    Poradíme mu?
18) Nová třídní učitelka řeší se svými žáky pracovní funkce na tento týden. Třída se skládá z 20 dívek a 10 chlapců. (Pozn. Každý žák může mít maximálně jednu funkci.) Určete:
    a) kolika způsoby z nich paní učitelka může vybrat jednoho nástěnkáře, jednoho pokladníka, šatnáře a jednoho žáka, který se bude starat o čistou tabuli,
    b) kolika způsoby může paní učitelka vybrat žáky na tyto funkce s tím rozdílem, že pokladníkem zůstává Vašek,

c) řešte znova úlohu b) tak, aby ve funkci nástěnkáře byla dívka a ve funkci šatnáře a „čističe tabule“ byl chlapec,
d) řešte opět úlohu a) pouze s tím rozdílem, že tři funkce zastávají chlapci a jednu dívka.

19) Adam s Evou po zařízení svého nového obývajícího pokoje zjistili, že pokoj stále není moc útulný a nepůsobí teple. Proto se rozhodli, že do pokoje dokoupí tři různé větší rostliny (různé druhy). Paní prodavačka jim ovšem nabídla 5 různých druhů rostlin. Kolik trojic rostlin si mohl pár domů odnést?
20) V cukrárně zvané „Mlsánek“ dnes prodávají 6 různých druhů zákusků. Kolika způsoby si může zákazník vybrat 3 zákusky, má-li být každý jiného druhu?
21) Určete všechny možnosti, jak rozdělit tři cestující – pana Nováka, Rádsetoulala a Skočdopole, do dvou vlakových kupé *A*, *B*.
22) Je dán pravidelný pětiúhelník KLMNO. Kolik různých trojúhelníků je určeno těmito body?
23) Paní učitelka připravuje pro své žáky test ze zeměpisu. Připravila si 10 různých otázek, přičemž test se má skládat pouze z pěti.
    a) Kolik možných variant testu může vytvořit, záleží-li na pořadí otázek v testu?
    b) Kolik možných variant testu může vytvořit, nezáleží-li, v jaké pořadí jsou otázky v testu poskládané?
24) Maminka Zdeňka pro svoji rodinu (pro sebe, manžela a tři děti) koupila lístky do divadla. Lístky jsou do třetí řady s čísly sedadel 1, 2, 3, 4, 5. Kolika způsoby se mohou posadit, chce-li tatínek sedět úplně na kraji (tj. sedadlo č. 1) a chlapci Tonda a Jenda chtějí sedět vedle sebe?
25) Basketbalové družstvo starších žáků se skládá z 15 hráčů – 6 pivotů, 6 křídel a třech rozehrávačů. Zjistěte, kolik různých sestav může trenér vytvořit, má-li mít sestava (herní „pětka“) 2 pivoty, 2 křídla a 1 rozehrávače.
26) Na volejbalový trénink přišlo 7 dívek a 8 chlapců. Určete, kolika způsoby je možné vybrat:
    a) dívčí šestičlenné družstvo,
    b) chlapecké šestičlenné družstvo,
    c) smíšené družstvo složené ze tří dívek a tří chlapců,
    d) smíšené družstvo, ve kterém jsou alespoň čtyři dívky.
27) Sněhurka koupila pro své trpaslíky 3 stejné modré a 4 černé svetry, aby jim v zimě bylo pěkně teplo. Určete počet možností, jak může svetry mezi trpaslíky rozdělit tak, aby každý dostal jeden. Kolik existuje možností, jestliže Šmudla dostane vždy černý svetr?
28) Kolik různých přirozených čtyřciferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 0, 1, 2, 3, 5, 7? Kolik z nich je dělitelných deseti? Kolik z nich je sudých?
29) V sáčku je pět různě velkých modrých a 7 různě velkých červených kuliček. Kolika způsoby je možné vybrat:
    a) 1 modrou a 1 červenou kuličku,
    b) 2 modré kuličky,
    c) 2 červené kuličky,
    d) 2 modré a 1 červenou kuličku?
30) Kolik úhlopříček má 4-úhelník, 5-úhelník, *n*-úhelník?
31) Na šachovnici 8 x 8 vyberte 3 políčka pro tři stejné černé pěšce tak, že:
    a) nezáleží na barvě políček,
    b) všichni pěšci stojí na tmavých políčkách,
    c) všichni pěšci nestojí v jednom sloupci,
    d) všichni pěšci nestojí na políčkách stejné barvy.

32) Ze sáčku, který obsahuje 6 různě barevných kuliček, vyberte tři kuličky tak, aby v dané trojici
   a) se vyskytovala červená kulička,
   b) se červená kulička nevyskytovala.
33) Víte, jak se hraje domino? Při dominu si 4 hráči rozdělí mezi sebe stejným dílem 28 různých kostek.Kolika způsoby to může být provedeno? (Kolik existuje možností různého rozdělení kostek?)
34) Kolika způsoby může rozdat dědeček Pepa svým pěti vnučkám 4 různé plyšové hračky, má-li každá dostat nejvýše jednu?
35) Kolika způsoby může rozdat dědeček Pepa svým pěti vnučkám sedm stejných rohlíků se šunkou, má-li každá dostat alespoň jeden?
36) Na ragbyový turnaj kadetů přijelo 6 různých týmů z celé republiky. Turnaj se hraje systémem „každý s každým“. Určete, kolik zápasů odehraje družstvo z Vyškova a kolik bude celkově odehráno zápasů?
37) Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8 x 8 umístit 1 černého pěšce, 1 bílou a 1 černou věž, 1 bílého koně a 1 černou královnu tak, aby:
   a) černé figurky stály na černých polích a bílé na polích bílých,
   b) libovolné dvě figurky stály na bílých polích a zbylé tři figurky stály na polích černých.

4.1.1 Výsledky

1) 20 **2)** 12 **3)** 15 **4)** 768 **5)** 81 **6)** 9; 9; 36

7) 14 **8)** 6 **9)** 24 **10)** 40 **11)** 720; 120

12) 24 **13)** 120; a) 48 b) 24 c) 12 **14)** a) 24 b) 6 c) 2 d) 6 e) 2

15) 720 **16)** 11! = 39 916 800; 10! = 3 628 800 **17)** a) 5 040 b) 720 c) 24

18) a) 657 720 b) 21 924 c) 1 440 d) 57 600 **19)** 10 **20)** 20

21) 8 **22)** $\binom{5}{3}=10$ **23)** a) 30 240 b) 252 **24)** 12

25) 675 **26)** a) $\binom{7}{6}=\binom{7}{1}=7$ b) $\binom{8}{6}=\binom{8}{2}$ c) $\binom{7}{3}\cdot\binom{8}{3}=1960$

d) $\binom{7}{4}\cdot\binom{8}{2}+\binom{7}{5}\cdot\binom{8}{1}+\binom{7}{6}\cdot\binom{8}{0}$ **27)** $\binom{7}{4}=\binom{7}{3}=35$; $\binom{6}{3}=20$

28) a) 300 b) 60 c) 108 **29)** a) 35 b) 10 c) 21 d) 70

30) $\binom{n}{2}-n=\frac{n\cdot(n-3)}{2}$ **31)** a) $\binom{64}{3}=41664$ b) $\binom{32}{3}=4960$

c) 41 216 d) 31 744 **32)** a) 10 b) 10 **33)** $\binom{28}{7}\cdot\binom{21}{7}\cdot\binom{14}{7}\cdot\binom{7}{7}$

34) 180 **35)** 15 **36)** 5; 15 **37)** a) 29 521 920 b) 295 219 200

4.2 Kombinatorika s opakováním

1) Při hudební výchově osm žáků 7. A píše písemnou práci z not. Kolika výsledků mohou dosáhnout, jestliže paní učitelka používá pouze známky 1, 2, 3?
2) Určete počet všech šesticiferných přirozených čísel, která je možné sestavit z cifer 2, 3, 4.
3) Určete počet všech šesticiferných přirozených čísel sestavených z cifer 2, 3, 4, která
   a) jsou sudá,
   b) jsou dělitelná čtyřmi.
4) Určete, kolika způsoby lze přemístit písmena slova LIST.
5) Určete, kolika způsoby lze přemístit písmena slova OKURKA.
6) Určete počet všech uspořádaných pětic složených z prvků *a*, *b*; z nichž prvek *a* se opakuje 3-krát a prvek *b* 2-krát.
7) Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova MAMINKA.
8) Vlk s Karkulkou se chystají házet třemi různě barevnými kostkami – červenou, žlutou a modrou. Po dlouhém přemlouvání vlk slíbil, že Karkulku nesežere, pokud alespoň na jedné kostce padne číslo 6.
   A. Kolik různých výsledků může na kostkách padnout? (Kostky rozlišujeme.)
   B. Kolik různých výsledků může na kostkách padnout, chceme-li, aby pouze na červené kostce padla 6?
   C. Kolik různých výsledků mohlo padnout, víme-li, že vlk Karkulku nesežral?
9) Určete počet všech anagramů, které lze získat z písmen slova OKURKA tak, aby
   a) se obě písmena *K* nevyskytovala vedle sebe,
   b) písmeno *K* následovalo bezprostředně za písmenem *U*,
   c) písmeno *A* následovalo bezprostředně za písmenem *U*.
10) Advokát Moravec se rozhodl pořídit si na svůj dům alarm. Bezpečnostní kód alarmu je čtyřmístný, tzn. záleží na pořadí, v jakém se čísla zadávají a čísla se mohou opakovat. Z kolika různých čtyřmístných kódů může advokát vybírat? Z kolika různých čtyřmístných kódů může advokát vybírat, chce-li mít na druhém místě číslo 2 a na třetím místě číslo liché?
11) Určete počet všech přirozených čísel menších než 10 000, v jejichž dekadickém zápisu se vyskytují pouze číslice 7 a 8.
12) Určete, kolik čtyřciferných přirozených čísel lze sestavit z cifer následujícího významného data: 1. 1. 1993.
13) Pět dívek si vybírá nové boty na aerobik. Paní prodavačka jim nabízí 5 různých typů bot, které má ve všech potřebných velikostech a v každé velikosti minimálně 6 párů. Kolika způsoby si mohou děvčata vybrat boty, rozlišujeme-li pouze typy bot?
14) V obchodě mají v dostatečném množství 3 druhy lízátek. Kolika způsoby můžeme koupit 4 lízátka?

15) Strýc Karel by rád poslal svým 3 bratrům (každý bydlí v jiném městě) k Velikonocům pohled. V trafice mu nabízejí 5 druhů pohledů, přičemž prodavačka má od každého druhu minimálně 5 kusů. Kolik různých trojic pohledů si může Karel domů přinést?
16) Určete, kolika způsoby je možné u bazénu mezi barem a palmou vyrovnat do řady 2 stejná modrá, 2 stejná červená a 2 stejná zelená lehátka?
17) Určete, kolika způsoby je možné do tří různobarevných krabiček rozmístit 6 stejných červených korálků.
18) V malém nočním klubu v Horní Lhotě mají na stropě v jedné řadě nainstalováno 6 žárovek, z nichž každá může svítit červeně, žlutě, modře či zeleně. Určete, kolik různých variant osvětlení můžeme dostat.
19) Je dána množina M = $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Určete počet všech podmnožin množiny M.
20) Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel, které lze sestavit z číslic 2, 8 tak, že cifra 8 se v daném čísle objevuje:
    a) právě 2x,
    b) nejvýše 2x,
    c) alespoň 2x.
21) Určete, kolika různými způsoby můžeme rozdělit 10 stejných jablek mezi 6 dětí, jestliže:
    a) nejsou dány žádné omezující podmínky,
    b) každé dítě dostane alespoň jedno jablko,
    c) nejmladší dítě dostane alespoň tři jablka.
22) Určete počet všech anagramů, jež lze vytvořit z písmen slova MAMINKA tak, aby žádné dvě souhlásky a žádné dvě samohlásky nestály vedle sebe.
23) Určete, kolika způsoby lze rozestavit tyto černé figurky: 2 koně, 2 střelce, 1 dámu a 3 pěšce:
    a) v poslední řadě šachovnice 8 x 8,
    b) v řadě šachovnice 8 x 8.
24) Dětský tábor pořádá pro své děti orientační běh, který je složen ze 4 různých stanovišť a na každém stanovišti mohou účastníci závodu získat maximálně 5 bodů. Závodníci mají slíbenou odměnu, pokud získají minimálně 17 bodů. Kolik bodů na jednotlivých stanovištích mohou děti získat, chtějí-li být oceněni?

4.2.1 Výsledky

1) $3^8 = 6561$ **2)** $3^6 = 729$ **3)** a) 486 b) 243 **4)** 24

5) 360 **6)** 10 **7)** 1 260 **8)** a) $6^3 = 216$ b) 36 c) 91

9) a) 240 b) 120 c) 60 **10)** a) 10^4 b) 500 **11)** 30

12) 38 **13)** 5^5 **14)** 15 **15)** 35 **16)** 90 **17)** 28

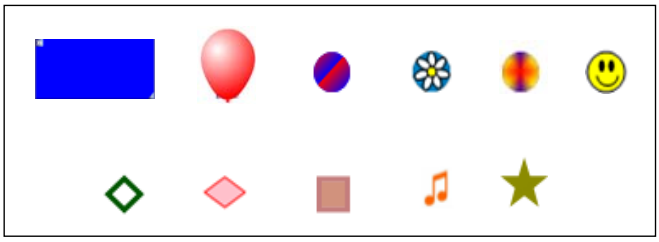
18) $4^6 = 4096$ **19)** 2^k **20)** a) 6 b) 11 c) 11 **21)** a) 3 003

b) 126 c) 792 **22)** 36 **23)** a) 5 040 b) 40 320 **24)** 35

5 Seznam kvízů

Kvízem bychom mohli nazvat druh slovních hádanek v podobě otázek a odpovědí či zábavnou hru, která slouží ke zprostředkování vědomostí a dovedností hravou formou. Kvíz představuje učení zábavnou formou a může být rovněž využit jako odpočinkový způsob výuky, v nichž si žáci mohou v několika minutách oddechnout od „nezáživné“ a obtížné látky a přitom se stále nevědomky vzdělávat. Kvízy by měly sloužit jako „několikaminutová odbočka“, aby studenti nabrali chuť, síly a energii pro řešení dalších úloh. Některé z nich jsou obohaceny o jednoduchou kombinatorickou úlohu, účelově vytvořenou.

U kvízů se vyskytují různé ikony (v různých barvách) – viz následující obrázek, pod kterými jsou skryty odpovědi, zajímavé informace apod.



5 Závěr

Interaktivní učebnice, která se vám dostala do rukou, představuje moderní pomůcku při výuce kombinatoriky. V současné době se jedná o nadstandardní didaktickou pomůcku, která by se však v budoucnu mohla stát pomůckou standardní.

Chtěla bych upozornit, že při práci s jakoukoliv technologií, čili i s interaktivní tabulí, je nutné neustále sledovat chování a reakce studentů, neboť pouze s ohledem na zpětnou vazbu spočívající v reakci studentů můžeme dosáhnout kvalitních vzdělávacích výsledků. Je důležité si uvědomit, že vytvořená interaktivní učebnice v žádném případě studenty kombinatoriku nenaučí. Jsou to převážně vyučující, kteří budou vždy hrát ve vzdělávacím procesu klíčovou roli. Interaktivní učebnice by měla sloužit pouze jako nástroj, který umožňuje nejen zábavnější a méně stereotypní formu výuky, ale rovněž probíranou látku ulehčit.

Přeji vám ve vaší práci hodně zdaru, vlastní uspokojení s používáním i-učebnice a na základě hodnocení studentů i radost z dobře vykonané práce na straně vaší i vašich studentů.

Marika Kafková