Modulární systém dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků JmK
v přírodních vědách a informatice
CZ.1.07/1.3.10/02.0024

Geometrie na SŠ

Využití Cabri II+

Gotika

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Obsah

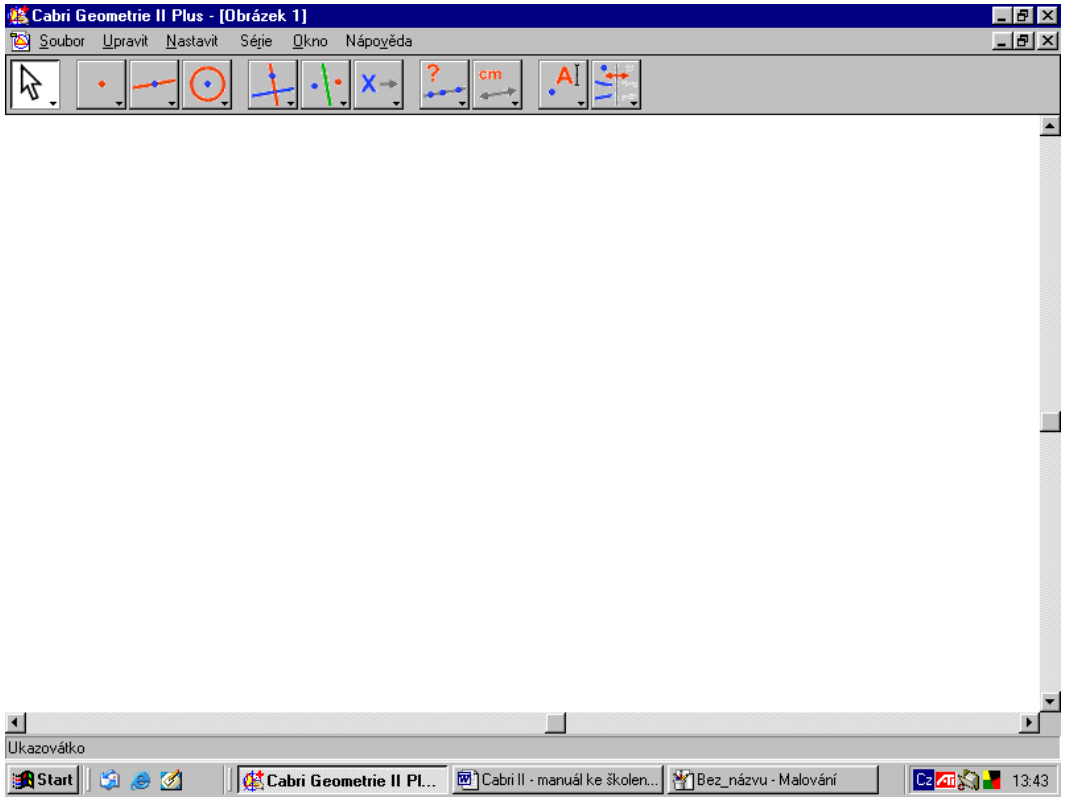
1 Návod ke Cabri II+ **2**
1.1 Prostředí . . . 2
1.2 Ukazovátko . . . 4
1.3 Skrývání a zpětné zobrazování objektů, grafické vlastnosti objektů . . . 4
1.4 Základní objekty, závislost objektů . . . 5
1.5 Základní konstrukce, geometrická zobrazení . . . 9
1.6 Popisy objektů . . . 10
1.7 Použití čísla v konstrukcích . . . 11
1.8 Výpočty . . . 14
1.9 Vlastnosti objektů . . . 16
1.10 Dynamika, pohyb . . . 17
1.11 Práce s výrazy, soustava souřadnic . . . 20
1.12 Makra . . . 23
1.13 Tabulky . . . 25
1.14 Závěrem . . . 26

2 Planimetrie s Cabri II+ **27**

3 Stereometrie s Cabri II+ **49**
3.1 Základní vlastnosti volného rovnoběžného promítání . . . 49
3.2 Tělesa . . . 50
3.3 Řezy . . . 56
3.4 Další polohové úlohy . . . 72
3.5 Metrické úlohy . . . 78
3.6 Písemné práce . . . 79

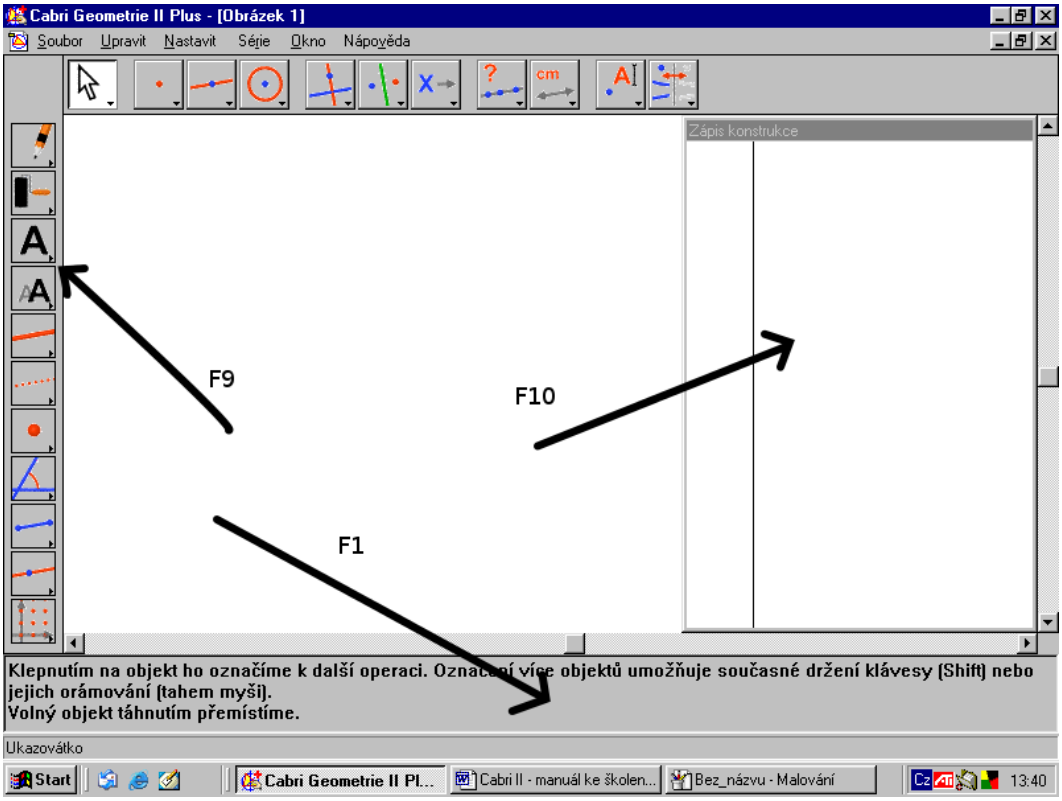
4 Gotika **89**
4.1 Oblouky . . . 93
4.2 Klenby . . . 97
4.3 Kružby . . . 100

1.1 Prostředí



Obrázek 1.1: Základní okno

Nastavit ⟶ zobrazit panel grafiky (F9)
Nastavit ⟶ zobrazit zápis konstrukce (F10)
Nápověda ⟶ nápověda ano/ne (F1)



Obrázek 1.2: Zobrazení panelů

Horní panel – tlačítka konstrukčních nástrojů

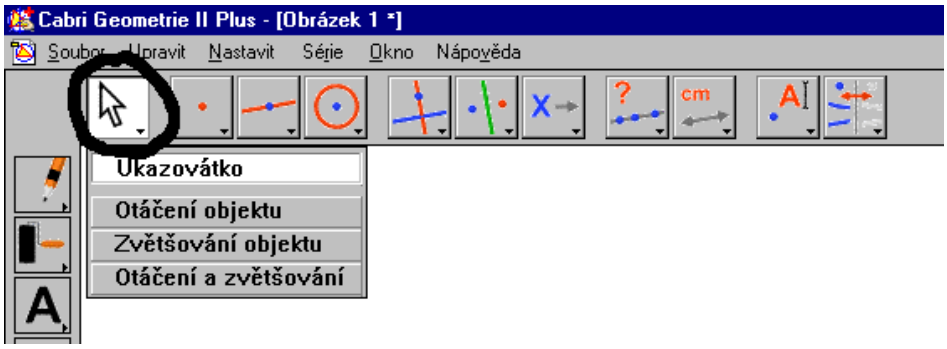
Levý panel – úpravy barev, stylů a tloušťky čar

Zápis konstrukce – zobrazí se postup konstrukce celého objektu

Nápověda – stručný popis právě vybraného konstrukčního nástroje

Plocha pro konstrukci – 1m $\times$ 1m – **Soubory** $\longrightarrow$ **Umístit obrazovku**

1.2 Ukazovátko



Obrázek 1.3: Ikona ukazovátko

Ukazovátko slouží k označování objektů a k manipulaci s objekty (posouvání, změna velikostí, skrývání, . . .)

1.3 Skrývání a zpětné zobrazování objektů, grafické vlastnosti objektů

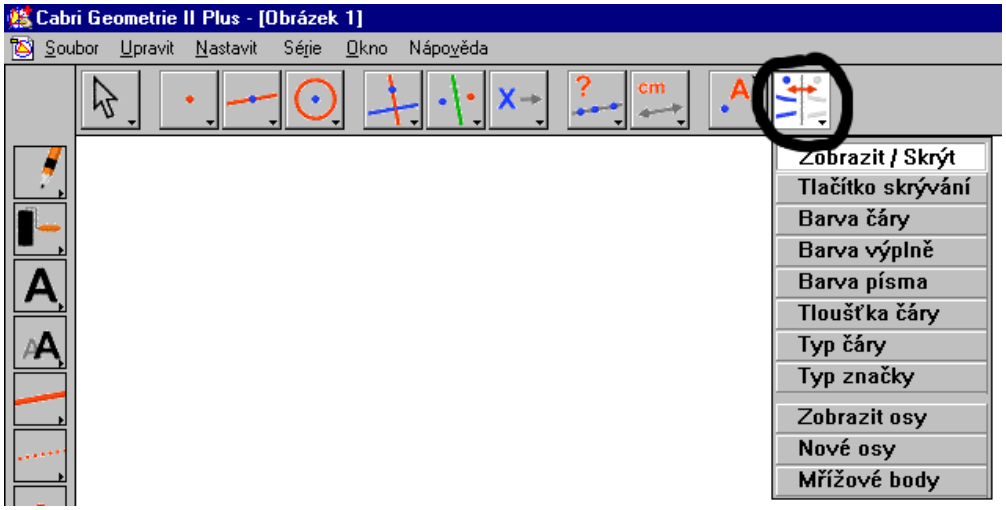
Poslední tlačítko v horním panelu:

Při výběru volby **Zobrazit / Skrýt** pak pomocí ukazovátka klepnutím označíme ty objekty, které při zvolení dalšího nástroje (případně po klepnutí do horního šedého pásu vedle tlačítek) „zmizí“. – budou pouze skryty, ale jejich vlastnosti zůstanou zachovány.

Nástroj **Tlačítko skrývání** vytvoří v nákresně tlačítko, které bude skrývat a zobrazovat zvolený objekt (zvolené objekty)

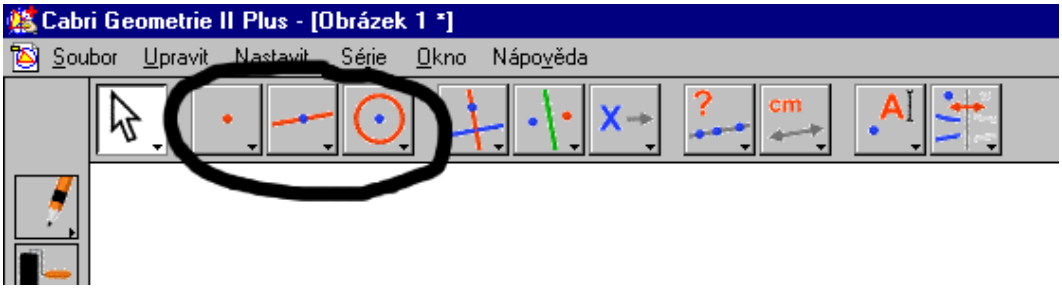
Při výběru dalších nástrojů ovládáme grafické vlastnosti objektů tak, jako pomocí levého grafického panelu.

Poslední tři volby slouží potřebám analytické geometrie a sledování funkčních závislostí.

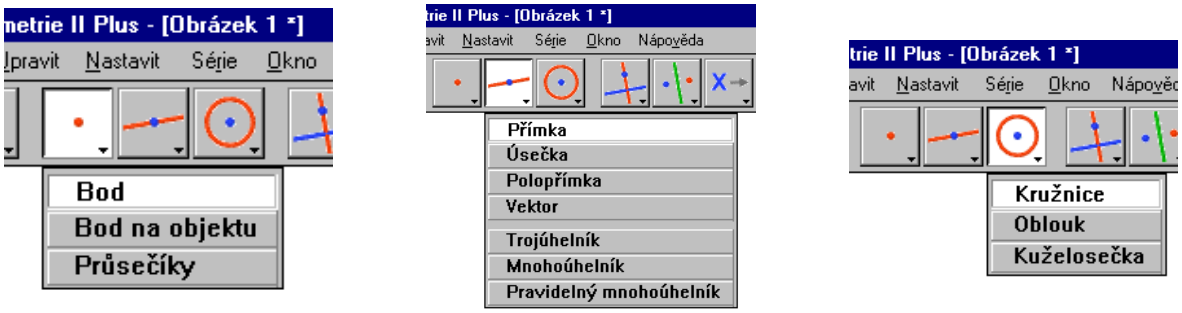


Obrázek 1.4: Ikona na skrývání a zobrazování

1.4 Základní objekty, závislost objektů



Obrázek 1.5: Tlačítka pro základní objekty



Obrázek 1.6: Tlačítka bod, přímka a kružnice

Označování a mazání objektů

Označení objektu:

- Vybereme nástroj ukazovátko, klepneme na objekt myší (grafická změna)
- Klepneme-li nyní do volného prostoru, objekt přestane být označen.
- Označení více objektů: stiskneme klávesu „shift“ a klepneme myší na další objekt. Lze takto označit libovolné množství objektů.
- Klepneme-li nyní do volného prostoru, všechny označené objekty přestanou být označeny.
- Označení všech objektů: postupem Upravit $\longrightarrow$ označit vše

Mazání objektů: Objekt (objekty) označíme a smažeme pomocí klávesy „delete“ nebo „backspace“ nebo postupem Upravit $\longrightarrow$ smazat.

Mazání celého pracovního listu: označíme vše a smažeme.

Příklady:

1. Sestrojte několik bodů – pomocí nástroje **Bod**, posouvejte jimi v rovině pomocí nástroje **Ukazovátko** (přibližte ukazovátko k bodu až se objeví popisek, zmáčkněte tlačítko myši, držte a posouvejte myší).

2. Sestrojte přímku pomocí nástroje **Přímka**. Posouvejte pomocí ukazovátka určujícím bodem, posouvejte přímkou. Porovnejte, co se stane, když odstraníte přímku a když odstraníte daný bod.

3. Sestrojte mnoho objektů přes sebe. Pohybujte kurzorem myši po nákresně a sledujte popisky. Klepněte v místě, kde se kříží více objektů. Sledujte, jak vyberete k označení objekt, který chcete.

4. Sestrojte přímku a bod, který na ní leží – pomocí nástroje **Bod na objektu**. Pohybujte bodem a přímkou a posuďte rozdíly oproti situaci v příkladě 2.

5. Sestrojte dva body a přímku, která jimi prochází. Posouvejte body, posouvejte přímkou. Odstraňte bod, odstraňte přímku.

6. Sestrojte dvě přímky. Změňte tloušťku čáry, barvu či typ čáry u jedné z nich (přímku označíme nástrojem **Ukazovátko** a pak pomocí tlačítek v panelu grafiky (levý svislý panel) nebo pomocí nástrojů pod posledním tlačítkem v horní liště měňte její grafické vlastnosti). Pak zvolte nástroj **Přímka** a před tím, než přímku sestrojíte, změňte některé její grafické vlastnosti. Sestrojíte-li další přímky, budou sestrojeny podle nového nastavení.

7. Sestrojte kružnici o libovolném poloměru pomocí nástroje **Kružnice**. Sledujte, co se stane, když chcete pohybovat bodem a kružnicí.

8. Sestrojte dva body a kružnici, jejíž střed je v jednom z nich a druhým z nich prochází. Pohybujte kružnicí a každým z bodů.

9. Sestrojte bod, kružnici s libovolným poloměrem se středem v tomto bodě, na kružnici bod (pomocí nástroje **Bod na objektu** nebo pomocí popisky, která se objeví u ukazovátka). Pohybujte tímto bodem, pohybujte kružnicí, měňte její poloměr. Pak sestrojte další dvě kružnice se středy v tomto druhém bodě, jedna prochází prvním z bodů, druhá má jiný libovolný poloměr. Sledujte, co se děje, když body a kružnicemi pohybujete a když měníte jejich poloměry.

10. Sestrojte kružnici tak, aby její střed ležel na dané přímce a procházela daným bodem. Objekty pohybujte.

11. Sestrojte dvě různoběžné přímky, každou přímo užitím nástroje **Přímka**. Na každé z nich je sestrojen bod, sestrojte kružnici, která má jeden z nich za střed a druhým prochází. Pohybujte všemi objekty. Pak sestrojte na jedné z přímek další bod a porovnejte vlastnosti kružnic (pohybujte objekty), když mají střed v tomto novém bodě či v původním bodě, který určuje jednu z přímek. Dále sestrojte průsečík

přímek (pomocí volby **Průsečík**) a opět sledujte vlastnosti všech možných kružnic, které mají dané body za své středy a dalšími body procházejí.

12. Sestrojte oblouk (nástroj **Oblouk**, konstrukce se provádí pomocí krajních a vnitřního bodu). Pohybujte objekty.

13. Sestrojte oblouk, který bude podmnožinou dané kružnice.

14. Sestrojte kuželosečku (nástroj **Kuželosečka**, konstrukce se provádí pomocí pěti bodů). Pohybujte body.

15. Sestrojte trojúhelník pomocí nástroje **Trojúhelník**, sestrojte bod, který leží na obvodu trojúhelníku. Sestrojte tři úsečky – pomocí nástroje **Úsečka**, které tvoří trojúhelník a sestrojte bod, který leží na tomto trojúhelníku (leží na jedné z těchto tří úseček). Body pohybujte a porovnejte rozdíly. Dále můžete sestrojit trojúhelník pomocí tří přímek, případně použít polopřímky – nástroj **Polopřímka**. Trojúhelník vybarvěte jinou barvou (pomocí panelu grafiky) – je to možné jen v případě, že je objekt sestrojen pomocí nástroje **Trojúhelník**.

16. Sestrojte mnohoúhelník (nástroj **Mnohoúhelník**, konstrukce se provádí pomocí vrcholů, ukončí se dvojitým poklepáním myší) a bod na tomto mnohoúhelníku. Tento bod může určovat další objekty – přímky, kružnice. Sledujte jejich vlastnosti při pohybu. Obarvěte jej, změňte tloušťku a barvu čáry.

17. Sestrojte mnohoúhelník a sledujte, co se děje při volbě nástrojů **Otáčení**, **Natahování** a **Otáčení a natahování**.

18. Sestrojte čtyři přímky a čtyřúhelník, který má vrcholy v jejich průsečících. Pohybujte objekty. Dále můžete za vrcholy mnohoúhelníku vzít určující body přímek či další body, které sestrojíte na některé z přímek či zcela mimo přímky. Objekty pohybujte.

19. Sestrojte pravidelný mnohoúhelník (nástroj **Pravidelný mnohoúhelník**) a sledujte jeho vlastnosti při pohybu určujících bodů. Pohybujte celým mnohoúhelníkem, sestrojte kružnici mnohoúhelníku opsanou.

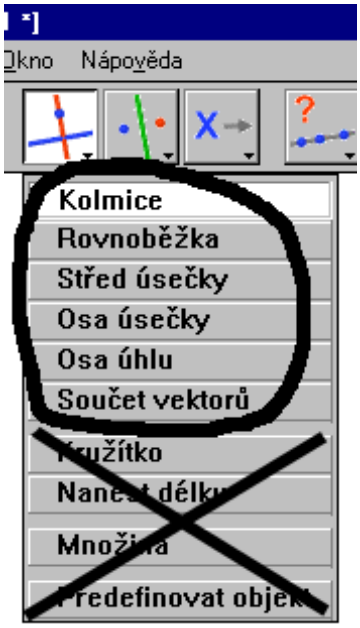
20. Nakreslete „model obíhání Země kolem Slunce“ – sestrojte dvě kružnice, které nemají společné body tak, aby jednou bylo možno „obíhat“ kolem druhé – přesně po vymezené oběžné dráze – kružnici (či elipse). Pomocí nástroje **Zobrazit / Skrýt** nebo pomocí **Tlačítka skrývání** skryjte všechny pomocné objekty. Přidejte i kometu i s ohonem (zakreslete jej jako úsečku, ohon směřuje vždy směrem od Slunce!), která obíhá Slunce po parabole nebo po elipse s velkou výstředností.

21. Sestrojte dvě kružnice tak, aby se dotýkaly, aby bylo možno oběma měnit poloměry, a aby bylo možno jednou z nich „kotálet“ po druhé (beze změny poloměrů). Ke konstrukci bude třeba použít další objekty. Skryjte všechny pomocné objekty.

22. Sestrojte dvě kružnice, které vzájemně procházejí svými středy. Pak sestrojte třetí kružnici, která má největší možný poloměr a leží celá ve vnitřních oblastech obou daných kružnic. (Bude se obou kružnic dotýkat.) Ke konstrukci bude třeba použít další objekty.

23. Sestrojte kosočtverec, který má jeden z vnitřních úhlů velikosti 60°. Ke konstrukci bude třeba použít další objekty.

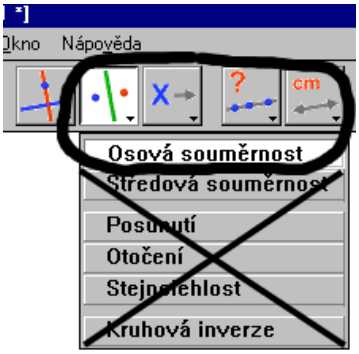
1.5 Základní konstrukce, geometrická zobrazení



Obrázek 1.7: Nástroj konstukce (volby)

Toto později ⟶

⟵ Toto později

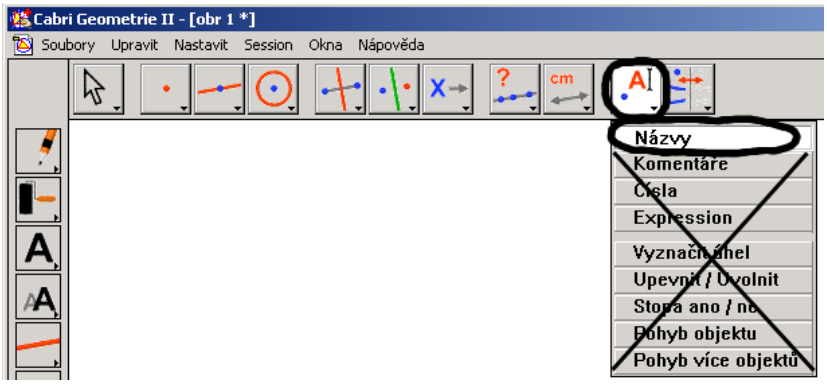


Obrázek 1.8: Nástroj zobrazení (volby)

Klepnutím myší do příslušného políčka zvolíme vybraný nástroj. Ikonka se změní podle volby. Pohybujeme myší (bez zmáčknutého tlačítka) a sledujeme popisky. Řídíme se nápovědou v dolní části obrazovky. Pro posunutí objektu je třeba nejdříve sestrojit

v nákresně vektor, který posunutí určí.

1.6 Popisy objektů



⟵ Toto později

Obrázek 1.9: Nástroj Názvy

Pomocí nástroje **Názvy** popisujeme sestrojené objekty. Zvolíme nástroj a pohybujeme myší po nákresně bez stisknutého tlačítka. Sledujeme popisky u kurzoru. Když se objeví popisek u objektu, který chceme popsat (např. u bodu se objeví „Tento bod“), klepneme myší a do obdélníčku, který se objeví, zapíšeme popis. Pak klepneme myší do volného prostoru. Popisek lze přesouvat pouze do jisté vzdálenosti od objektu. Popisek se přesouvá i při pohybu objektu.

Příklady

1. Sestrojte kružnici, zvolte na ní bod a sestrojte tečnu, která se dané kružnice dotýká ve zvoleném bodě.

2. Sestrojte obdélník a vybarvěte jej.

3. Sestrojte libovolný trojúhelník a nalezněte jeho průsečík výšek. Sledujte, jak se mění jeho poloha při změně velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku.

4. Sestrojte kružnici trojúhelníku opsanou. Pohybujte vrcholy trojúhelníku.

5. Sestrojte kružnici trojúhelníku vepsanou. Pohybujte vrcholy trojúhelníku.

6. Sestrojte tečny kružnice z bodu ležícího vně kružnice. Pohybujte bodem, měňte poloměr kružnice.

7. Sestrojte společné tečny dvou kružnic, měňte poloměry a vzájemnou polohu kružnic.

8. Sestrojte přímku p a mnohoúhelník M. Sestrojte obraz mnohoúhelníku M v osové souměrnosti s osou p. Pohybujte osou, mnohoúhelníkem M i jeho vrcholy. Vysledujte, že obrazem pohybovat nelze.

9. Sestrojte bod S a elipsu e. Na elipse sestrojte bod A a sestrojte kružnici k, která má střed v bodě A. Všechny objekty zobrazte ve středové souměrnosti se středem S. Pohybujte kružnicí po elipse e a sledujte pohyb obrazu. Změňte elipsu na jinou kuželosečku přemístěním jejích určujících bodů. Pohybujte středem souměrnosti.

10. Sestrojte úsečku AB a Thaletovu kružnici t nad AB. Zvolte libovolný bod C na t, trojúhelník ABC a sledujte trojúhelník při změně bodu C. Proveďte konstrukci tak, aby se bod C mohl pohybovat pouze po půlkružnici v jedné z polorovin s hraniční přímkou AB.

11. Jsou dány dvě různoběžky p a q. Uvnitř jednoho z úhlů, který je jimi určen, je dána kružnice k. Sestrojte kružnici l, která se dotýká přímek p a q a kružnice k.

12. Nakreslete volný rovnoběžný průmět kvádru $ABCDA'B'C'D'$, zvolte na hranách BB', $A'B'$ a $C'D'$ body X, Y a Z. Sestrojte řez – průnik kvádru s rovinou XYZ.

13. Vydlážděte rovinu shodnými pravidelnými šestiúhelníky.

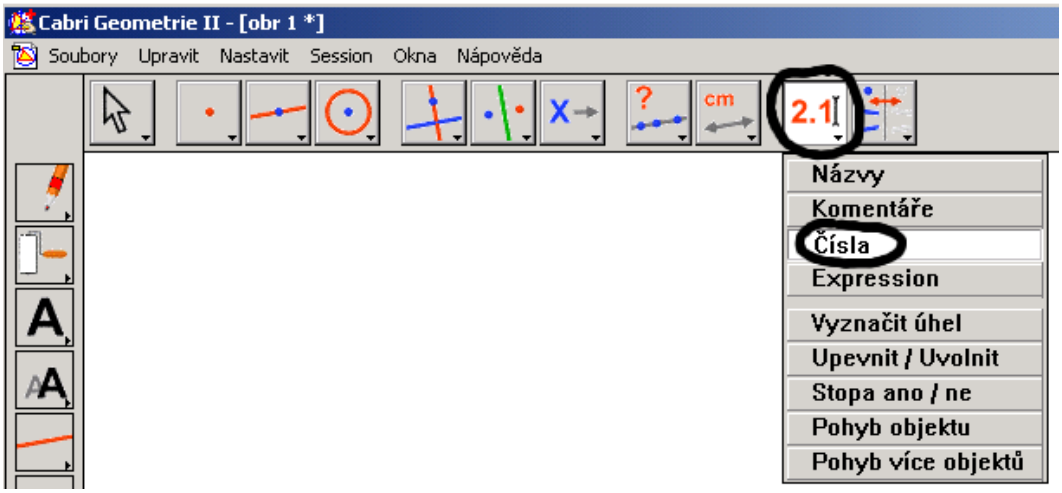
14. Vydlážděte rovinu shodnými obecnými čtyřúhelníky.

15. Uvnitř obdélníku (kulečníkového stolu) zvolte dva body (kulečníkové koule). Vykreslete trajektorii pohybu jedné z koulí tak, aby trefila druhou kouli odrazem o dva sousední mantinely. Pohybujte body, měňte rozměry kulečníkového stolu.

1.7 Použití čísla v konstrukcích

Vybereme nástroj **Čísla**. Klepneme do nákresny, do vzniklého okénka zapíšeme číslo (celé či desetinné). Klepneme-li myší znovu do nákresny, objeví se nový obdélníček pro zápis čísla (nástroj **Číslo** je stále zvolen). Pro další práci musíme vybrat jiný nástroj nebo klepnout do šedého pole vedle panelu nástrojů. Hodnotu lze měnit – dvojím poklepáním

se objeví okénko znovu. Pomocí šipek vpravo můžeme velikost čísla krokovat: označíme část čísla jako blok a pak poklepáváním myší na šipky měníme hodnoty postupně.



Obrázek 1.10: Nástroj Čísla

Konstrukční nástroje využívající čísla

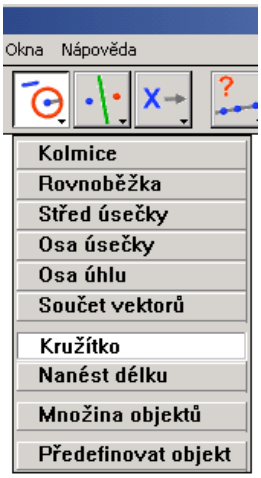
Při použití těchto nástrojů nejdříve do nákresny zadáme pomocí nástroje **Čísla** číslo, se kterým budeme pracovat.

Kružítko: Sestrojíme kružnici pomocí středu a poloměru. Zvolíme bod (musí být sestrojen), který bude středem kružnice. Zadáme poloměr klepnutím na číslo. Změnou číselné hodnoty se změní poloměr kružnice. Poloměr může být také zadán pomocí dvojice bodů (zadá se jako jejich vzdálenost), nebo pomocí úsečky (zadá se jako její délka).

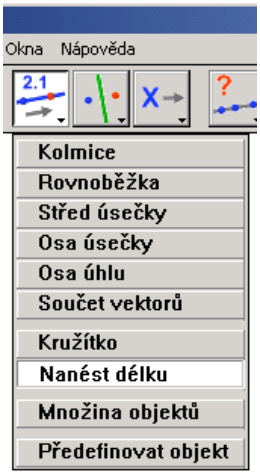
Nanést délku: Naneseme délku, která je reprezentována danou číselnou hodnotou, na objekt – polopřímku, kružnici, mnohoúhelník, vektor a souřadnicovou osu. Nejdříve označíme číslo, pak objekt (u kružnice i počáteční bod).

Otočení: Jde o geometrické zobrazení. Označíme objekt, který bude otáčen, bod – střed otáčení, a číslo – úhel otáčení ve stupních proti směru hod. ručiček. Na pořadí označování nezáleží, řídíme se popisky u kurzoru myši.

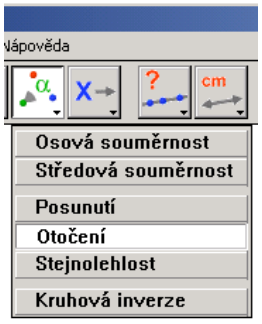
Stejnolehlost: Jde o geometrické zobrazení. Označíme objekt, který budeme zobrazovat, bod – střed stejnolehlosti, a číslo – koeficient stejnolehlosti. Na pořadí označování nezáleží, řídíme se popisky u kurzoru myši.



Obrázek 1.11: Nástroj Kružítko



Obrázek 1.12: Nástroj Nanést délku



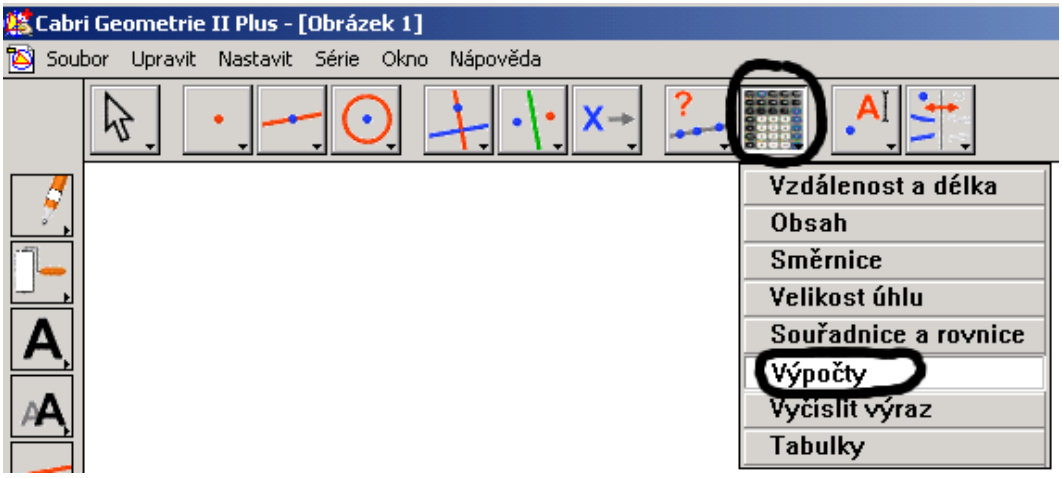
Obrázek 1.13: Nástroj Otočení

Obrázek 1.14: Nástroj Stejnolehlost

Příklady

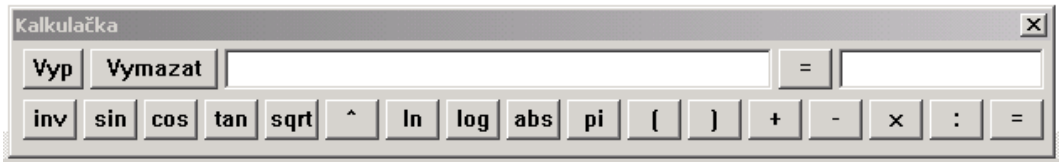
1. Sestrojte čtverec, kterým budete otáčet pohybováním bodu po malé kružnici sestrojené vedle.
2. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána délka strany AB, délka těžnice na stranu BC a výška na stranu AB.
3. Ověřte platnost Euklidovy věty o výšce.
4. Sestrojte model planetárního systému, ve kterém Země obíhá kolem Slunce a kolem Země obíhá Měsíc. Sestrojte model tak, aby byl veškerý pohyb ovládán pohybem jediného bodu.
5. Sestrojte kružnici a na ní bod. Poté zakreslete tuto kružnici ve volném rovnoběžném promítání, jako by ležela v rovině, ve které obvykle zakreslujeme podstavy hranolů.

1.8 Výpočty



Obrázek 1.15: Nástroj Výpočty

Po volbě nástroje **Výpočty** se v dolní části obrazovky zobrazí kalkulačka, s jejíž pomocí můžeme dále pracovat s čísly vynesenými v nákresně a posléze výsledky výpočtů do nákresny zobrazit.



Obrázek 1.16: Kalkulačka

Abychom mohli s kalkulačkou pracovat, je třeba do ní klepnout myší (horní proužek zmodrá a objeví se kurzor).

Pomocí číselné klávesnice můžeme zadávat konstanty, pomocí tlačítek zobrazených na panelu kalkulačky zadáváme funkce a početní operace (ty jde zadat přímo z klávesnice).

Chceme-li do kalkulačky zadat hodnotu vynesenou v nákresně (např. délku některé

úsečky), klepneme na ně myší (kalkulačka musí být aktivní – modrý horní proužek). Tato hodnota se zapíše jako proměnná, program je zadává podle abecedy, ale pamatuje si, které číslo bylo které proměnné přiřazeno.

Po dokončení výpočtu klepneme na některé z tlačítek =. V pravém okénku se zobrazí výsledek, ten je možno chycením a přetažením myši vložit do nákresny. S takto získaným číslem lze dále pracovat jako s jakýmkoli číslem. Tlačítko **Vyp** kalkulačku vypne – stejně jako křížek v pravém horním rohu, tlačítko **Vymazat** vymaže obsah kalkulačky.

Kromě zobrazených funkcí (tlačítko **inv** slouží k zadání cyklometrických funkcí: inv + sin zobrazí arcsin) má kalkulačka ještě další funkce:

- hyperbolické funkce (píšeme sinh, cosh, tanh, do závorky připíšeme hodnotu nebo proměnnou)
- inverzní funkce k fukcím hyperbolickým (píšeme argsinh, argcosh, argtanh)
- exponenciální funkci s přirozeným základem e (píšeme exp(x) – x je proměnná)
- zaokrouhlení na nejbližší celé číslo (píšeme round(x))
- nejbližší vyšší celé číslo (píšeme ceil(x) – x je proměnná)
- nejbližší nižší celé číslo (píšeme floor(x) – x je proměnná)
- větší hodnota z dvou čísel (píšeme max(a, b) – a a b jsou proměnné)
- menší hodnota ze dvou čísel (píšeme min(a, b) – a a b jsou proměnné)
- náhodné číslo z daného intervalu (píšeme random(a,b))

Příklady

1. Vypočtěte obsah trojúhelníku pomocí jeho strany a výšky, porovnejte s výpočtem pomocí jiné strany a výšky.
2. Vypočtěte obsah trojúhelníku pomocí Heronova vzorce, porovnejte s jiným výpočtem.
3. Ověřte platnost Pythagorovy věty.
4. Sestrojte elipsu tak, abyste znali její ohniska a vrcholy.
5. Sestrojte elipsu s ohnisky. Demonstrujte 3. (?) Kepplerův zákon – o rychlosti oběžnice kolem stálice. Obsahy výseče elipsy lze nahradit obsahy mnohoúhelníku.
6. Ověřte, že těžiště dělí těžnici v poměru 1 : 2

1.9 Vlastnosti objektů

Obrázek 1.17: Nástroj Vlastnosti

V přímce? – vypíše do nákresny, zda jsou tři zvolené body v přímce.
Rovnoběžně? – vypíše, zda jsou dvě zvolené přímky (úsečky,...) rovnoběžné.
Kolmo? – vypíše, zda jsou dvě zvolené přímky (úsečky, ...) kolmé.
Stejně vzdálen? – vypíše, zda je bod stejně vzdálen od dvou dalších bodů.
Na objektu? – vypíše, zda je daný bod na zvoleném objektu.
Při označování objektů se řídíme nápovědou.

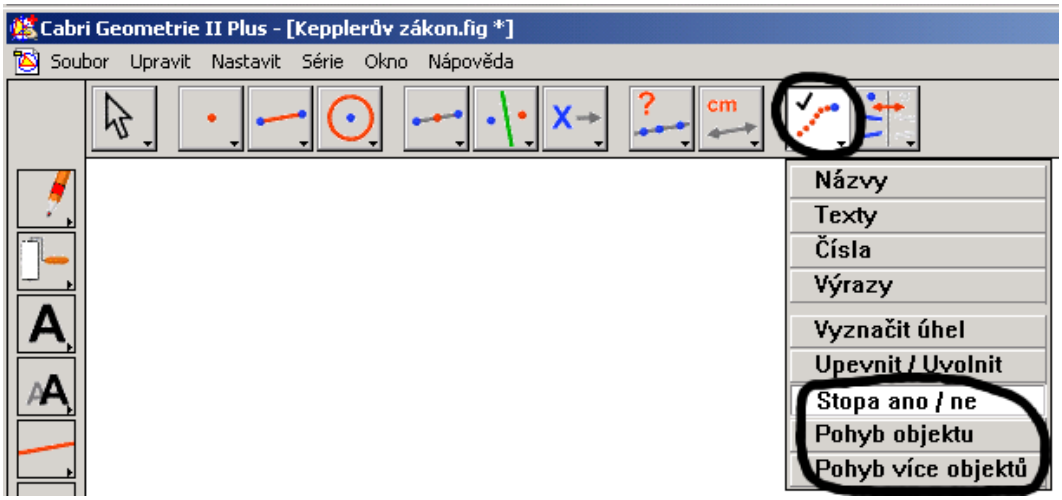
Příklady

1. Sestrojte parabolu pomocí ohniska a ověřte, že paprsek vyslaný z ohniska se od paraboly odrazí rovnoběžně s její osou.

2. V libovolném trojúhelníku sestrojte těžiště, střed kružnice opsané a průsečík výšek. Ověřte, že tyto body leží na přímce a určete poměr jejich vzdáleností.

3. Sestrojte dvě kružnice, které se dotýkají vně. Jejich společným bodem veďte dvě sečny obou kružnic. Ukažte, že spojnice takto získaných průsečíků s jednou kružnicí je rovnoběžná se spojnicí takto získaných průsečíků s druhou kružnicí.

1.10 Dynamika, pohyb



Obrázek 1.18: Nástroj Pohyb

Volbou nástroje **Stopa ano/ne** označíme bod (či jiný objekt nebo více objektů), který bude při pohybu zanechávat v nákresně stopu. Stopa není sestavena z označitelných bodů a smažeme ji volbou **Upravit** $\longrightarrow$ **Překreslit**, nebo klávesovou zkratkou Ctrl F. Stopa se vykresluje vždy, dokud opět nástrojem **Stopa ano/ne** bod „neodznačíme“.

Volbou nástroje **Pohyb objektu** dostaneme do „ruky“ pružinu, kterou „natáhneme“ u bodu a puštěním vyvoláme jeho samovolný pohyb (a všech od něj odvozených objektů). Pohyb zastavíme klepnutím myši.

Volbou nástroje **Pohyb více objektů** můžeme „natáhnout pružiny“ u více bodů. Objeví se okénko:

Klepneme na zvolený bod a natáhneme pružinu. Odklepneme. ⟶

Spustíme/zastavíme pohyb ⟶

Obrázek 1.19: Vyvolané okénko

⟵ Klepnutím odstraníme pružinu u zvoleného bodu.

⟵ Tlačítko zpět.

Nástrojem **Množina** sestrojíme výslednice pohybu bodu v závislosti na pohybu jiného bodu nikoli jako stopu objektu, se kterou nelze dále pracovat, ale jako množinu, která má stejné vlastnosti jako ostatní objekty v nákresně – lze ji označit, obarvit, odstranit, lze na ni umístit bod apod.

Řídíme se nápovědou. Nejdříve klepneme na bod, jehož stopu chceme určit, pak na bod, jehož pohyb bude stopu určovat.

Pomocí volby **Nastavit** ⟶ **Nastavit prostředí**, záložka **Množiny** můžeme nastavit vlastnosti vykreslované množiny.

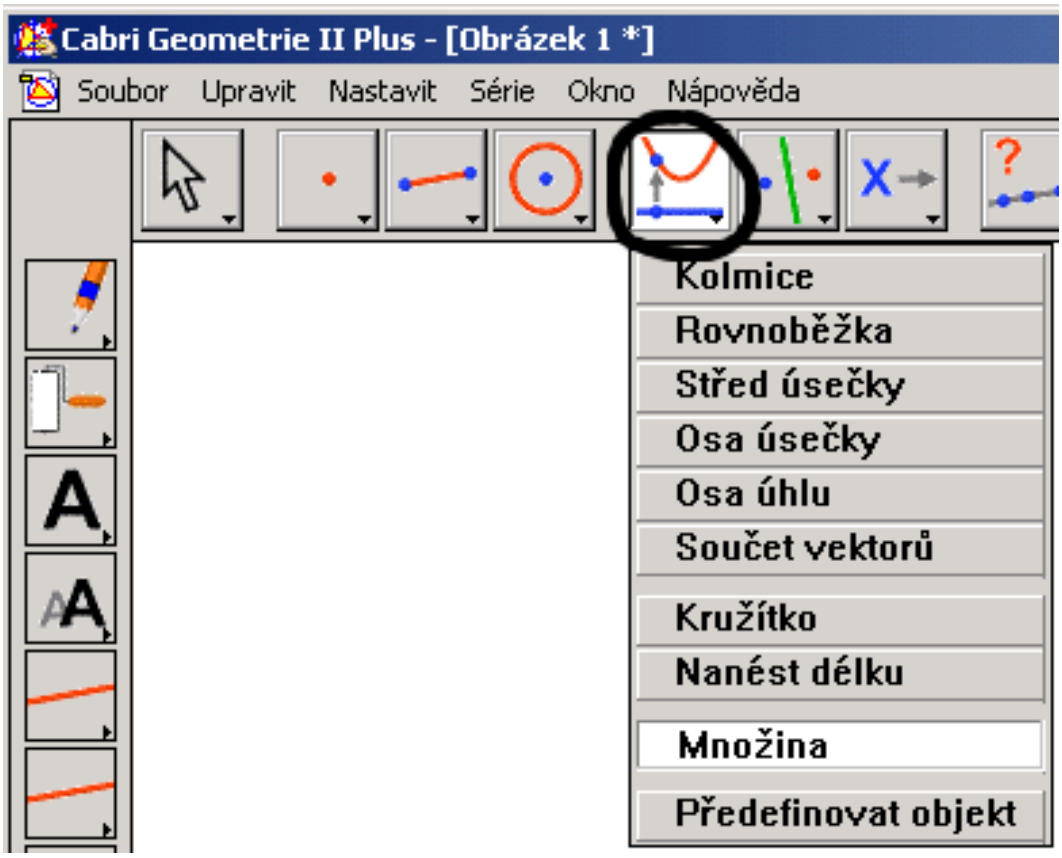
Příklady

1. Sestrojte dvě kružnice a úsečku, která má krajní body každý na jedné z kružnic. Zvolte uvnitř úsečky bod. Označte jeho stopu. Sledujte, jak závisí kresba – pohyb bodu – na směru pohybu a rychlosti pohybu krajních bodů úsečky po kružnicích.

2. Sestrojte dvě kružnice a úsečku s krajními body na každé z nich. Označte úsečku k vykreslování stopy. Sledujte stopu při pohybu krajních bodů úsečky.

3. Sestrojte parabolu jako množinu bodů s danou vlastností.

4. Sestrojte množinu všech bodů v rovině, které mají součin vzdáleností od daných pevných bodů v rovině roven pevně zvolené konstantě.



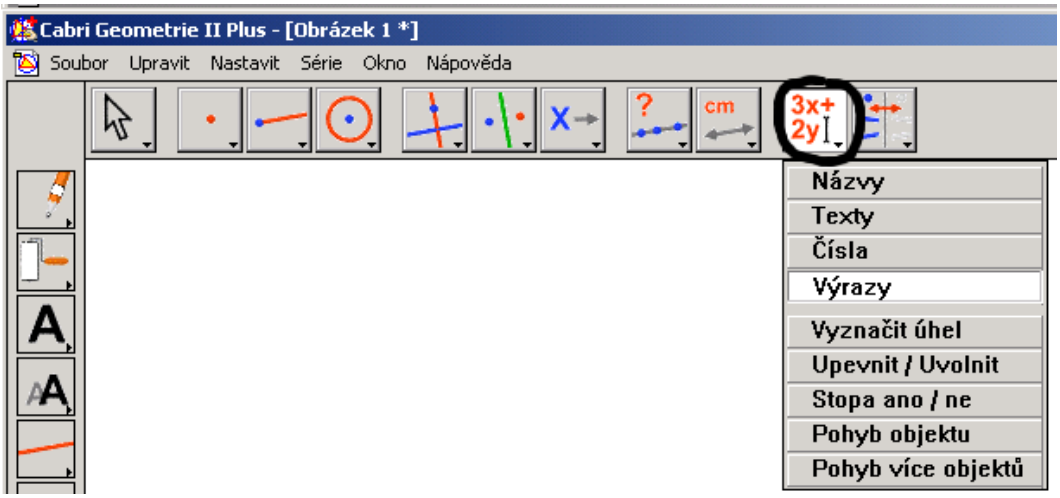
Obrázek 1.20: Nabídka nástroje Množina

5. Sestrojte množinu všech bodů v rovině, které mají od daných pevných bodů stejný poměr vzdáleností.

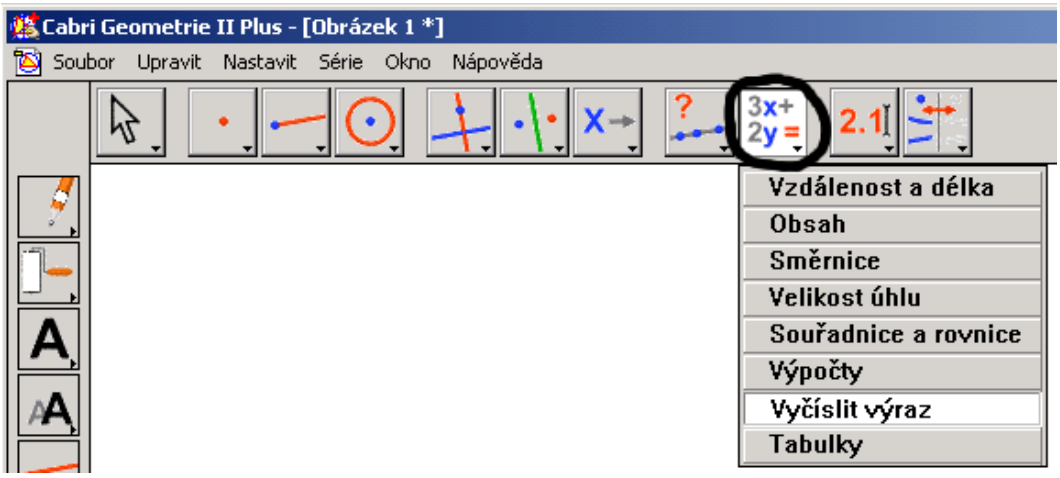
6. Sestrojte množinu všech bodů v rovině – obrazů bodu kružnice, která se „kotálí“ po přímce – cykloidu.

7. Jsou dány dvě různoběžné kolmé přímky a úsečka délky d. Její krajní body leží každý na jedné z daných přímek. Nalezněte množinu všech bodů, kterou opíše střed této úsečky při pohybu jejích krajních bodů po přímkách. Pak uvažujte jiný bod než střed, bod mimo úsečku. Dále uvažujte dané přímky různoběžné, ale ne kolmé.

1.11 Práce s výrazy, soustava souřadnic



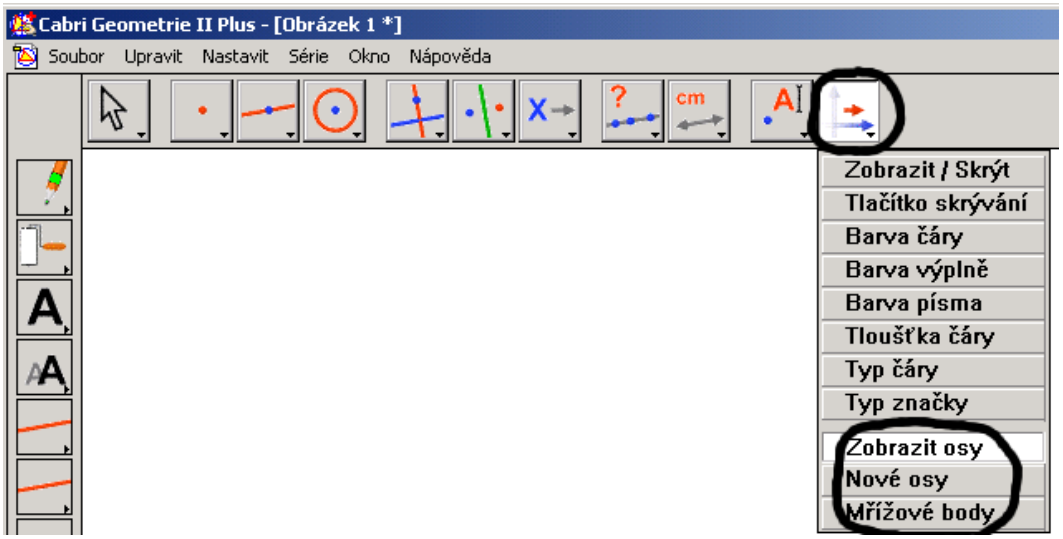
Obrázek 1.21: Nástroj Výrazy



Obrázek 1.22: Nabídka nástroje Výrazy

Volbou nástroje **Výrazy** zapíšeme do nákresny výraz, kde písmena znamenají proměnné a čísla konstanty. Nejde o text, s výrazem lze dále pracovat.

Volbou nástroje **Vyčíslit výraz** můžeme do zapsaného výrazu dosadit hodnoty, které máme zapsány v nákresně (čísla). Klepneme na výraz a pak postupně označujeme jednotlivá čísla, která dosazujeme za proměnné – řídíme se popisky u kurzoru myši. Výsledná hodnota se objeví v nákresně.

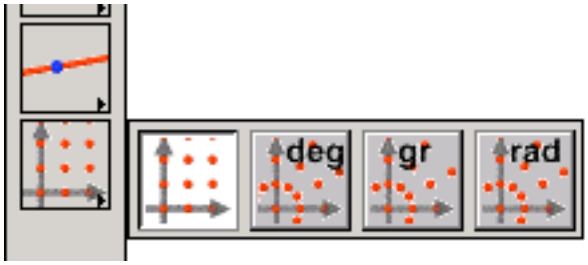


Obrázek 1.23: Nástroj Zobrazit osy

Zobrazit osy – zobrazí osy soustavy souřadnic. Posouváním jednotky na ose x lze měnit měřítko na obou osách, posouváním jednotky na ose y lze měnit měřítko pouze na ose y, přesouváním počátku přesouváme celý systém souřadnic, natáčením osy x natáčíme celou soustavu souřadnic, natáčením osy y měníme úhel os. Po deformaci os nelze přesně obnovit výchozí stav (!). Na osy lze nanášet délku pomocí nástroje **Nanést délku**, lze k nim vést kolmice či rovnoběžky. Osy z nákresny odstraníme volbou **Skrýt osy**, která se vypíše místo volby **Zobrazit osy**.

Nové osy – vloží do nákresny další soustavu souřadnic, která je závislá na již sestrojené soustavě – klepneme na počátek, umístíme osu x' a pak osu y'. **Mřížové body** – zobrazíme mřížové body klepnutím na některou z os soustavy souřadnic. Mřížové body se chovají jako jiné body, lze jimi prokládat objekty. Odstraníme je z nákresny tak, že jeden z nich smažeme. Odstraníme tím však i všechny objekty, které jsou jimi určeny. Volbou poslední položky v panelu grafiky můžeme zobrazit mřížové body kartézské soustavy

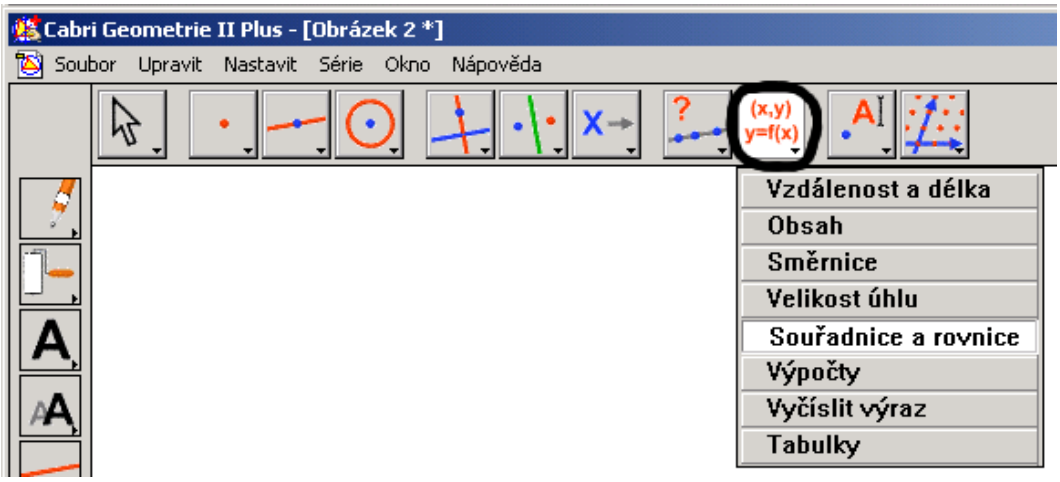
souřadnic nebo polární soustavy souřadnic – a to v různých jednotkách.



Obrázek 1.24: Nabídka Mřížových bodů

Pomocí nástroje **Souřadnice a rovnice** můžeme do nákresny vypsat souřadnice označeného bodu nebo rovnici označené množiny.

Pomocí volby **Nastavit** $\longrightarrow$ **Nastavit prostředí**, záložka **Souřadnice a rovnice** můžeme nastavovat tvary rovnic základních objektů.



Obrázek 1.25: Nástroj Souřadnice a rovnice

Příklady

1. Sestrojte v soustavě souřadnic kružnici a kuželosečku jdoucí mřížovými body a vypište její rovnici.

2. Vykreslete graf funkce y = sin(x) užitím definice pomocí jednotkové kružnice.

3. Vykreslete graf funkce y = tg(x) užitím jednotkové kružnice.

4. Ke stěně domu má být přistaveno plotové pletivo tak, že ohraničí pozemek tvaru obdélníku. Plotem budou ohraničeny tři strany pozemku. Jaký má být poměr délek stran obdélníku, když máme k dispozici pletivo délky d a chceme, aby ohraničený obdélník měl co největší obsah? Vykreslete graf.

5. Z listu papíru tvaru obdélníku s danými stranami máme vystřihnout plášť krabičky bez víka tak, že z každého rohu vystřihneme čtvereček. Určete, jaký má být rozměr strany tohoto čtverečku, aby byl objem krabičky maximální možný. Vykreslete graf.

1.12 Makra

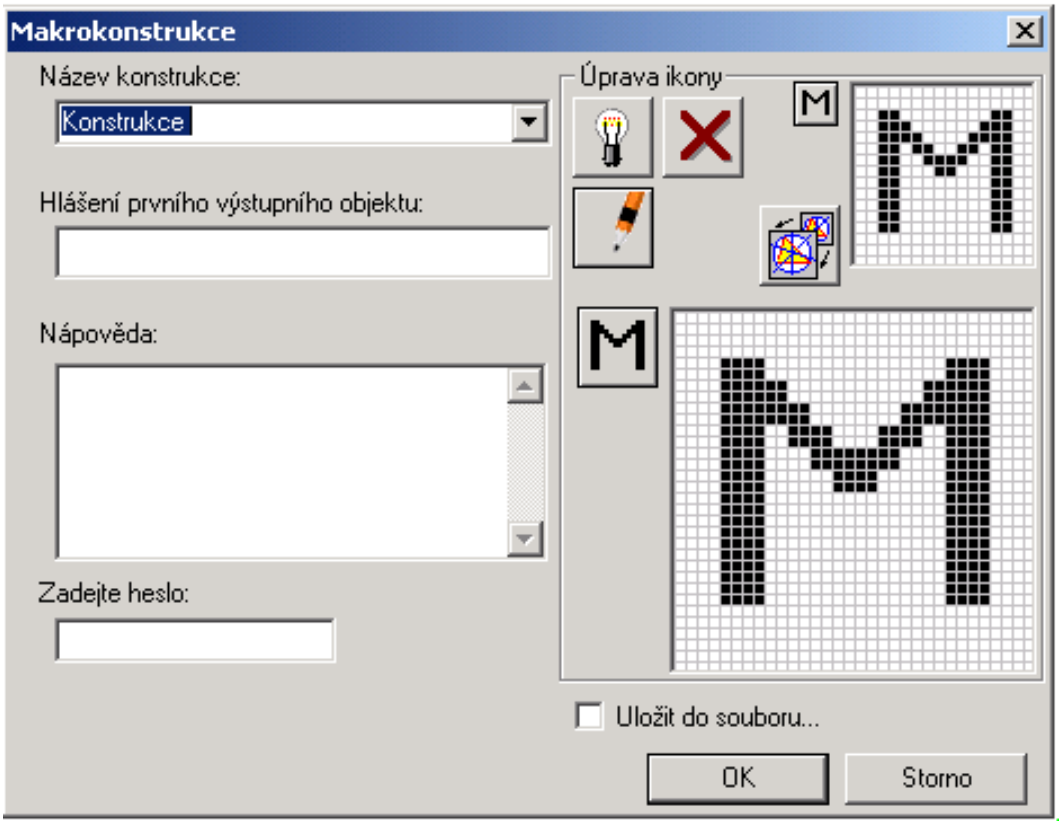
Obrázek 1.26: Nástroj Makra

Pomocí maker můžeme některé konstrukce, které se opakují, zjednodušit – vytvoříme si novou volbu v nabídce nástrojů.

Vstupní objekty: označíme klepnutím myši postupně všechny objekty, které danou konstrukci určují.

Výstupní objekty: označíme výsledek konstrukce.

Uložit makrokonstrukci: pomocí okna, které se zobrazí, makro dokončíme.



Obrázek 1.27: Uložení makra

- určíme název
- určíme, jak se bude jmenovat první objekt, který je výsledkem konstrukce
- můžeme editovat nápovědu, která se zobrazuje ve spodním okně zaškrtneme-li volbu Uložit do souboru, v následujícím okně vyhledáme složku, do které makro uložíme. Jde o soubor s příponou .mac. Takto uložené makro můžeme nahrát k libovolnému obrázku a použít, jestliže makro neuložíme, je použitelné pouze v daném obrázku.
- můžeme nakreslit vlastní ikonku.

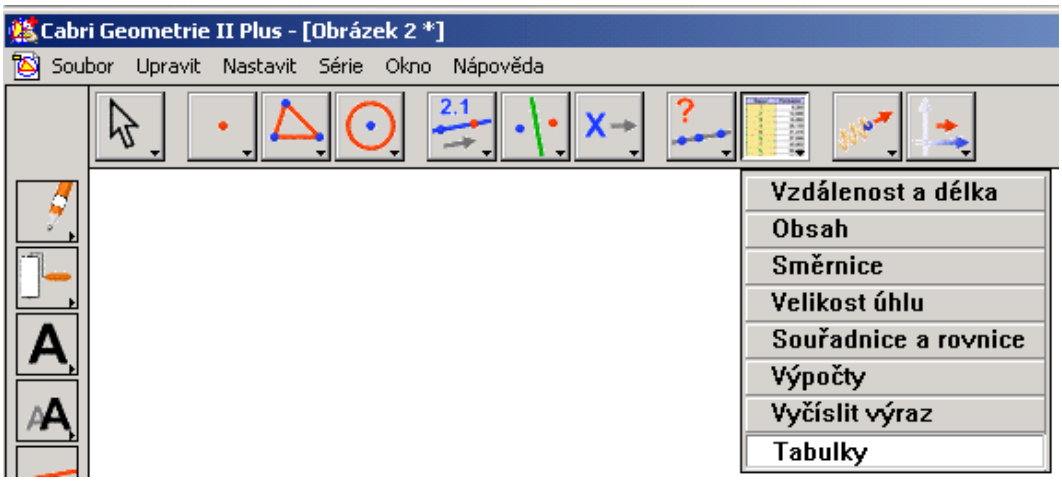
- pomocí nabídky **Soubor** $\longrightarrow$ **Otevřít** nahrajeme makro tak, že vyhledáme složku, ve které je uloženo a v okénku Typ souboru vybereme nabídku .mac.

Příklady

1. Sestavte makro pro sestrojení kružnice jdoucí třemi body – kružnice opsané trojúhelníku.

2. Sestavte makro pro sklápění bodu do roviny podstavy tělesa ve volném rovnoběžném promítání.

1.13 Tabulky



Obrázek 1.28: Nástroj Tabulky

Volbou nástroje **Tabulky** vložíme do nákresny prázdnou tabulku. Táhnutím za roh měníme velikost tabulky počet zbrazených řádků a sloupců. Čísla, která jsou umístěna v nákresně, můžeme tabelovat tak, že klepneme postupně na čísla, která chceme tabelovat. Je-li k číslu připsán text (jako součást čísla), objeví se v horním záhlaví tabulky. Změníme-li pohybem bodů v nákresně situaci – a tím získáme nové hodnoty – můžeme je klávesou Tab vložit do dalšího řádku tabulky.

Jestliže označíme tabulku a pak zvolíme pohyb bodů pomocí nástroje **Pohyb objektu**, tabulka se začne vypisovat automaticky až do počtu 1000 řádků.

Jestliže tabulku označíme a vložíme do schránky – pomocí klávesové zkratky Ctrl C, nebo pomocí volby **Upravit** $\longrightarrow$ **Kopírovat**, je možno tabulku vložit např. do programu MS Excel, kde je možno s daty dále pracovat.

Příklady

1. Sestavte tabulku, která popíše závislost obsahu čtverce na délce jeho strany.
2. Vypište tabulku hodnot funkce y = sinx.

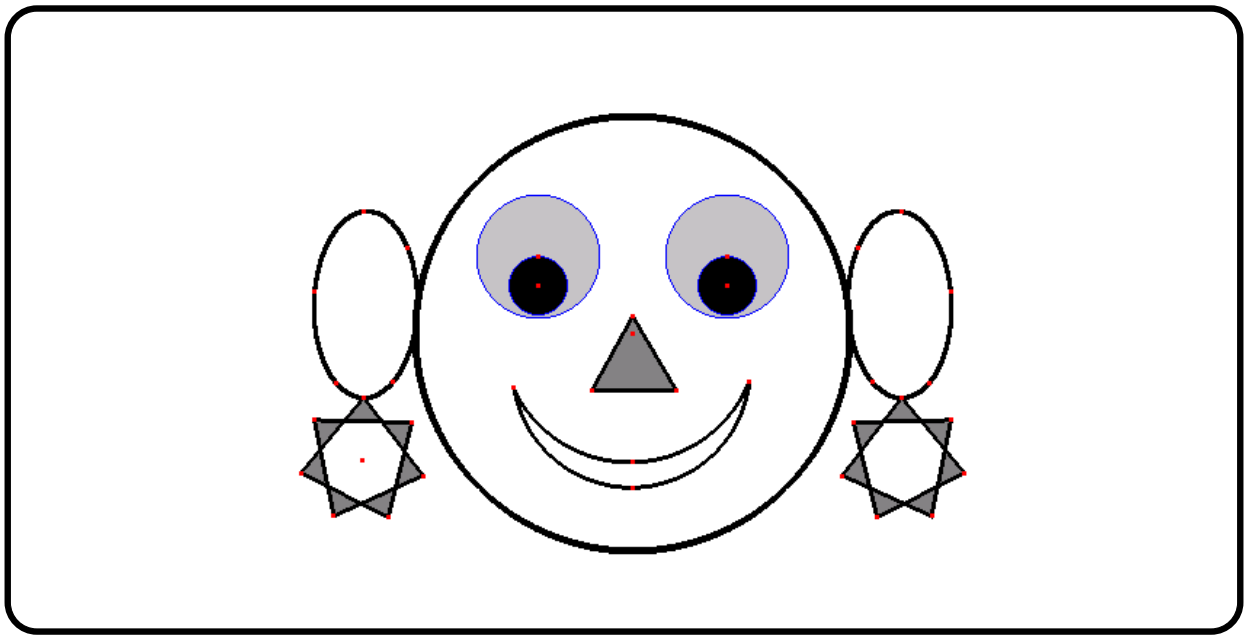
1.14 Závěrem

Pomocí schránky (Ctrl C, nebo Upravit $\longrightarrow$ Kopírovat), je možno obrázky vytvořené v Cabri vkládat do ostatních aplikací (i když nefungují vždy zcela korektně).

Zarámujeme pomocí myši oblast, kterou chceme vystřihnout, a zkopírujeme. Pak vložíme např. do textu MS Word.

Pomocí schránky lze také kopírovat sestrojené konstrukce znovu do nákresny. Zkopírují se pouze viditelné a zcela zarámované objekty, závislost zůstane zachována, pokud budou všechny objekty překopírovány.

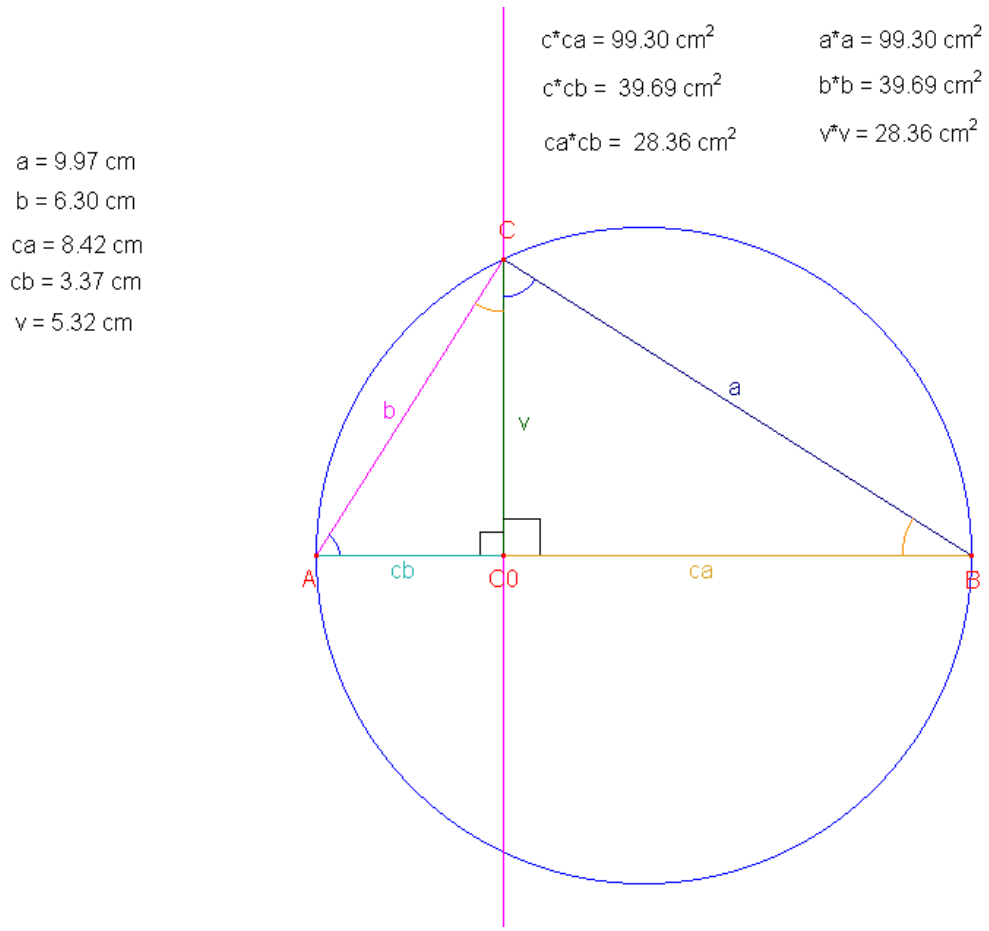
Pomocí volby Série lze ukládat sérii snímků do jedné složky a tuto sérii pak přehrát např. ve vyučovací hodině. Je možné řídit se nápovědou.



Připravené soubory lze užít „jen“ jako obrázky pro podporu výkladu. Učitel při práci v Cabri může výhodně použít řadu možností, které tento program nabízí. Obrovskou výhodou je dynamičnost jednotlivých modelů. Učitel může pohybem označených objektů měnit jejich polohu i rozměry. Jednotlivé obrázky se pak překreslují a student si může všímat, že zmiňované vlastnosti platí obecněji než jen v jisté konkrétní poloze. Dále je možné měřit délky úseček či velikosti úhlů a kontrolovat tak platnost podmínek, které jsou předmětem učitelova výkladu. Z naměřených hodnot pak lze provádět další výpočty (např. v souborech věnovaným problematice Euklidových vět či mocnosti bodu ke kružnici). Opačně je tímto způsobem možné vést studenta k tomu, aby si povšiml skutečnosti, že některé vlastnosti zcela obecně neplatí. Může pak sám „objevit“ podmínky, po jejichž splnění příslušná vlastnost platí (např. že průsečík výšek trojúhelníku je jeho vnitřním bodem tehdy a jen tehdy, je-li tento trojúhelník ostroúhlý). Pro větší přehlednost lze některé připravené konstrukce skrýt, aby se obrázek plný čar nestával nepřehledným. Užitím tohoto nástroje lze výklad rozkrokovat a obrázek postupně doplňovat „odtajňováním“ jeho dalších částí. Podobně lze přímo v Cabri doplnit doprovodné texty, poznámky či výpočty k předmětné problematice (např. v souboru, ve kterém jsou studovány délky úseček, na které rozdělí jeho strany dotykové body kružnice vepsané). V případě značení úhlů je speciální symbol vyhrazen pro pravý úhel. Při vyznačení každého úhlu je tedy ihned patrné, zda se jedná o úhel pravý.

Jednotlivé soubory předkládají učiteli možnost jejich využití při výuce teoretických vlastností ve středoškolské planimetrii studovaných objektů. Předložené soubory by měly středoškolské učivo v části teoretických poznatků pokrývat, v některých částech i převyšovat. Využít je lze zejména při probírání vlastností planimetrických útvarů. Velmi dobře je s nimi možné tyto vlastnosti vysvětlovat, dokazovat. Pro tyto účely jsou úsečky téže délky často zakresleny stejnou barvou, úsečky nestejných délek jsou vyznačeny naopak barvami různými. Podobně jsou stejným způsobem (stejnou barvou, případně stejným typem značky) značeny úhly stejných velikostí. Některé soubory jsou utvořeny s tématickou návazností či rostoucí obtížností úvah (např. vlastnosti tětivového čtyřúhelníku, následně studium bodů, které leží na kružnici opsané trojúhelníku, až po tzv. Feuerbachovu kružnici). Soubory s náročnější tématikou lze případně využít jen ilustračně, motivačně, či studentům ukázat něco zajímavého, aniž bychom třeba do důsledku prováděli důkazy.

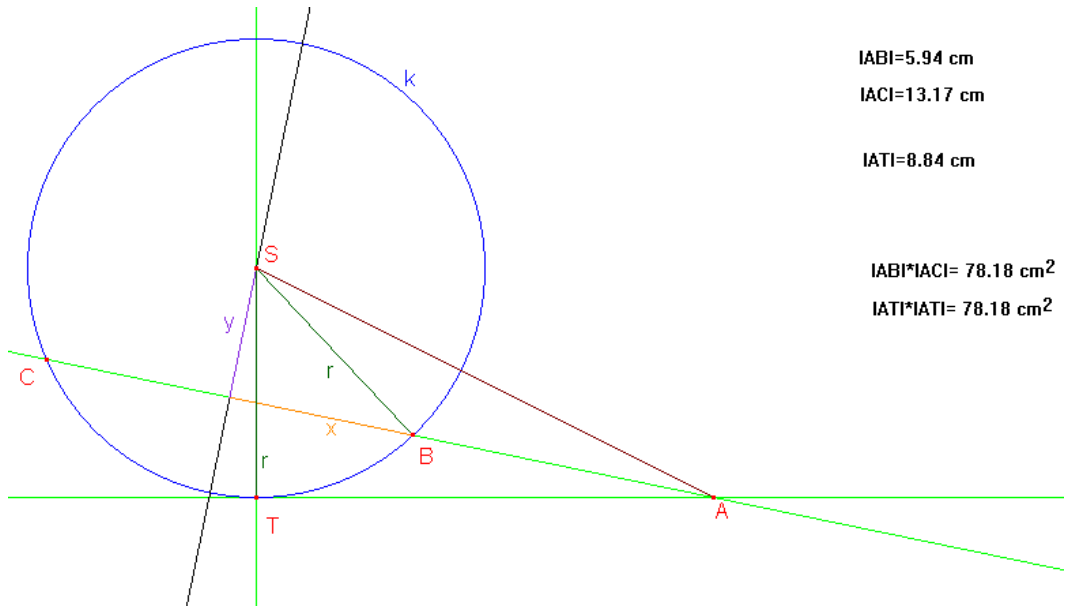
Euklidovy věty



Obrázek 2.1: Demonstrace Euklidových vět

Pomocí shodných úhlů lze zdůvodnit podobnosti vyznačených trojúhelníků. Jako poměry délek odpovídajících si stran pak dostáváme znění jednotlivých Euklidových vět. „Kontrolní výpočty“ jsou provedeny přímo v souboru a při změnách rozměrů se automaticky přepočítávají.

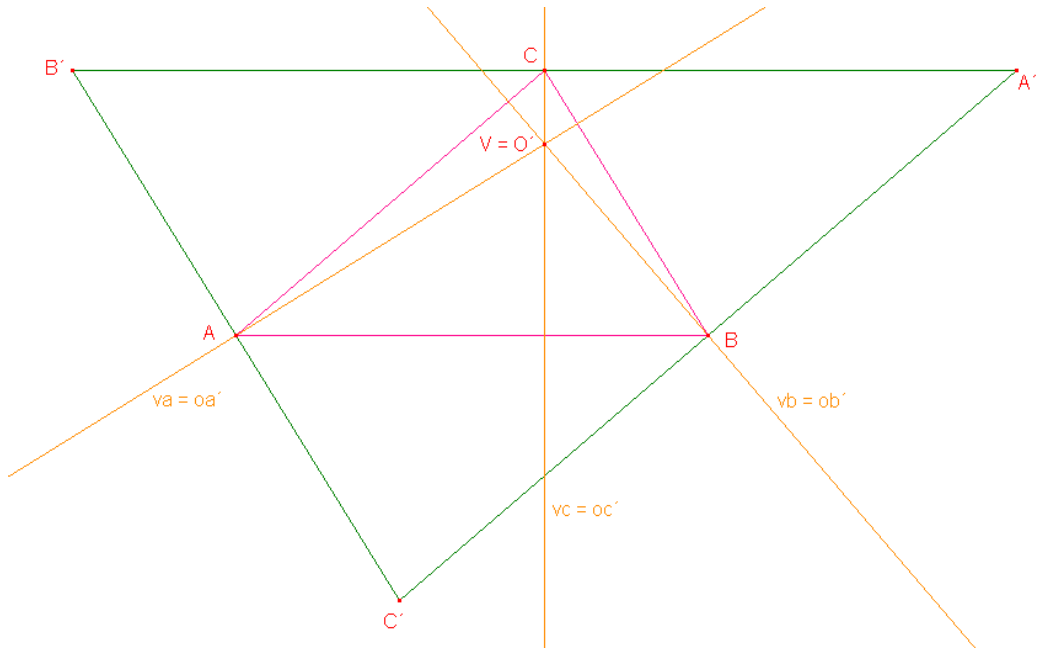
Mocnost bodu ke kružnici



Obrázek 2.2: Mocnost bodu A ke kružnici k

Platnost příslušného vztahu je ukázána pomocí výpočtů v souboru. Zobrazením skrytých rozměrů lze odvodit platnost tvrzení opakovaným užitím Pythagorovy věty. Student si díky připravenému modelu též může snadno povšimnout, že mocnost bodu ke kružnici se mění s jeho polohou vůči této kružnici.

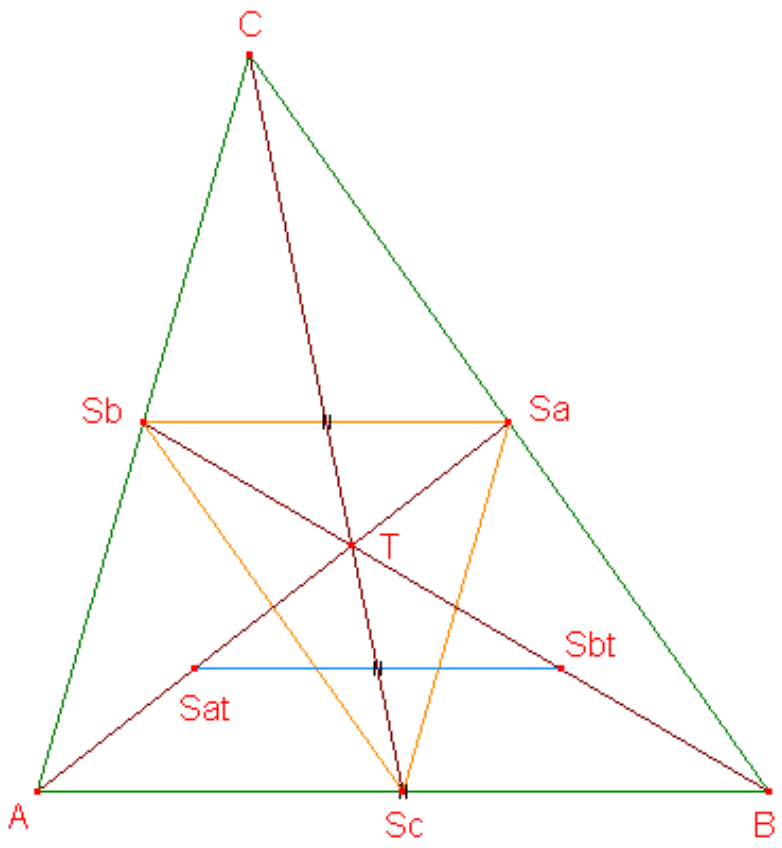
Osy stran splývají s výškami



Obrázek 2.3: Situace ze zadání

Uvážíme-li průsečík os dvou stran libovolného trojúhelníku, pak tento bod má stejnou vzdálenost od všech jeho vrcholů a tudíž jím musí procházet i osa zbývající strany tohoto trojúhelníku. To znamená, že v libovolném trojúhelníku se osy všech tří jeho stran vždy protnou v jediném bodě, který je tedy středem kružnice jemu opsané. Uvážíme-li dále „menší“ trojúhelník tvořený středními příčkami původního trojúhelníku, pak na osách stran původního trojúhelníku musí ležet výšky trojúhelníku „menšího“. Ty se tedy opět musí protnout v jednom bodě. Dále lze snadno zkoumat polohu ortocentra vůči uvažovanému trojúhelníku v závislosti na velikosti jeho vnitřních úhlů.

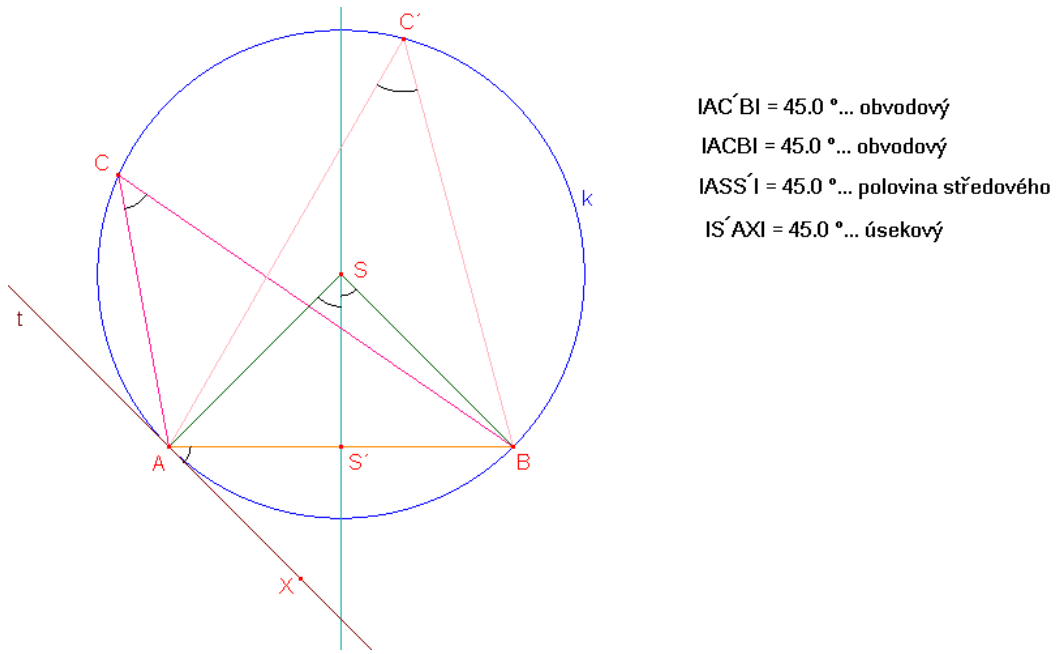
Těžiště trojúhelníku



Obrázek 2.4: Težiště trojúhelníku ABC

Prací s tímto souborem lze studentům předvést, že i všechny těžnice v libovolném trojúhelníku se protínají v jediném bodě a že těžiště pak dělí těžnici na třetiny. Důkaz je pak možné provést s využitím středních příček. K tomu lze využít připravené objekty, které jsou skryté.

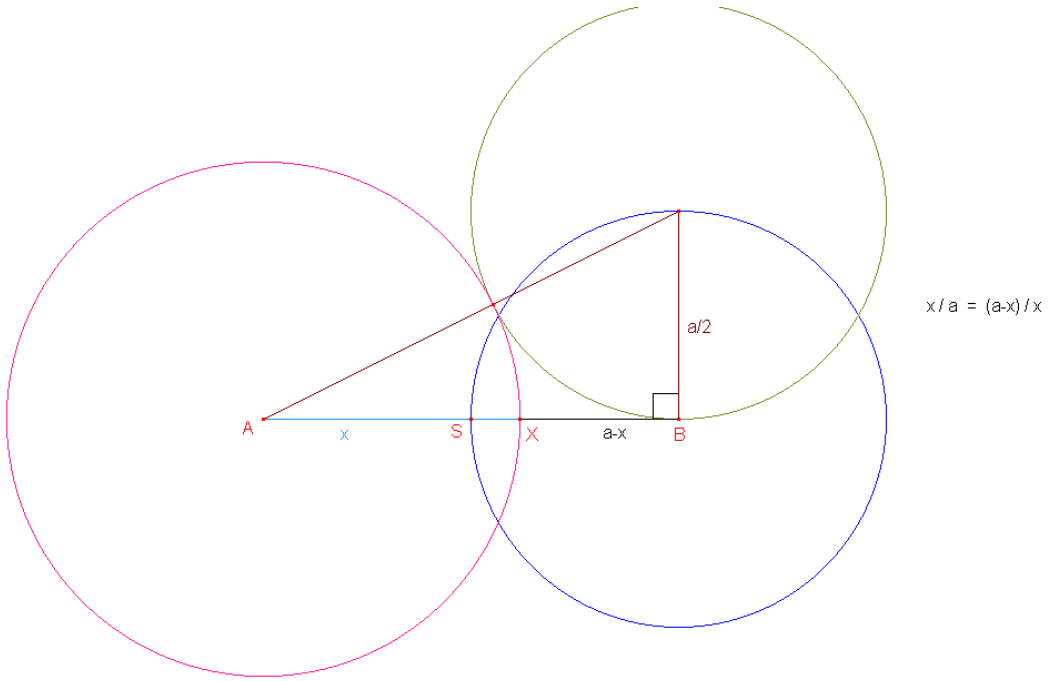
Středové, obvodové a úsekové úhly



Obrázek 2.5: Ukázka úhlů na kružinici k

S využitím tohoto souboru lze efektivně ukázat, že danou tětivu uvažované kružnice vidíme z každého vnitřního bodu jistého oblouku této kružnice (určeného uvažovanou tětivou) pod stejným úhlem (rovnost obvodových úhlů). Stejný úhel pak svírá tečna této kružnice, která se jí dotýká v krajním bodě této tětivy, s touto tětivou (rovnost obvodového a úsekového úhlu). Dvojnásobek tohoto úhlu pak odpovídá úhlu středovému. Pomocí skrytých konstrukcí můžeme provést důkazy popsaných tvrzení, které se opírají o vlastnosti rovnoramenných trojúhelníků.

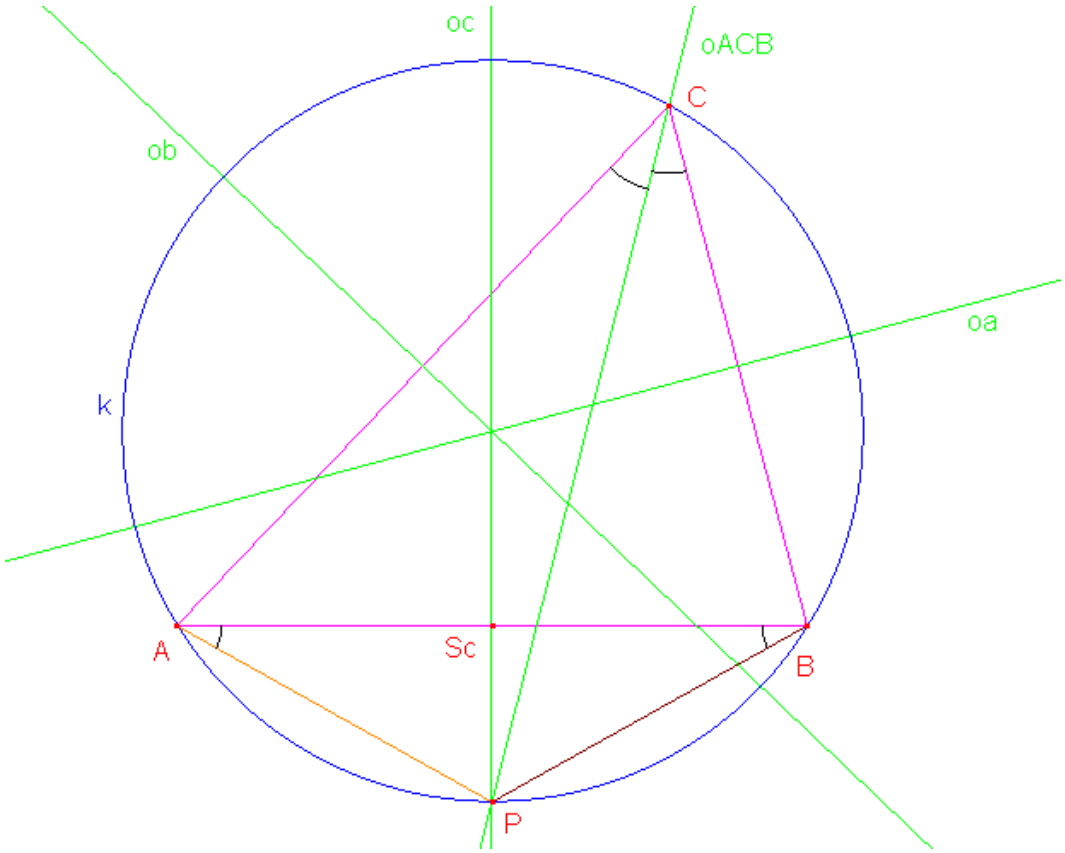
Zlatý řez



Obrázek 2.6: Bod X dělí úsečku AB v poměru zlatého řezu

Vyřešením v souboru zapsané rovnice s parametrem a získáme délku, kterou potřebujeme sestrojit. V souboru je provedena Herónova konstrukce zlatého řezu. Je vhodné ukázat, že tuto konstrukci provádíme jen za pomocí pravítka (bez měřítka) a kružítka. Studenty je vhodné ke studiu této problematiky motivovat vhodnými ukázkami a propojením matematiky s uměním, přírodou ...

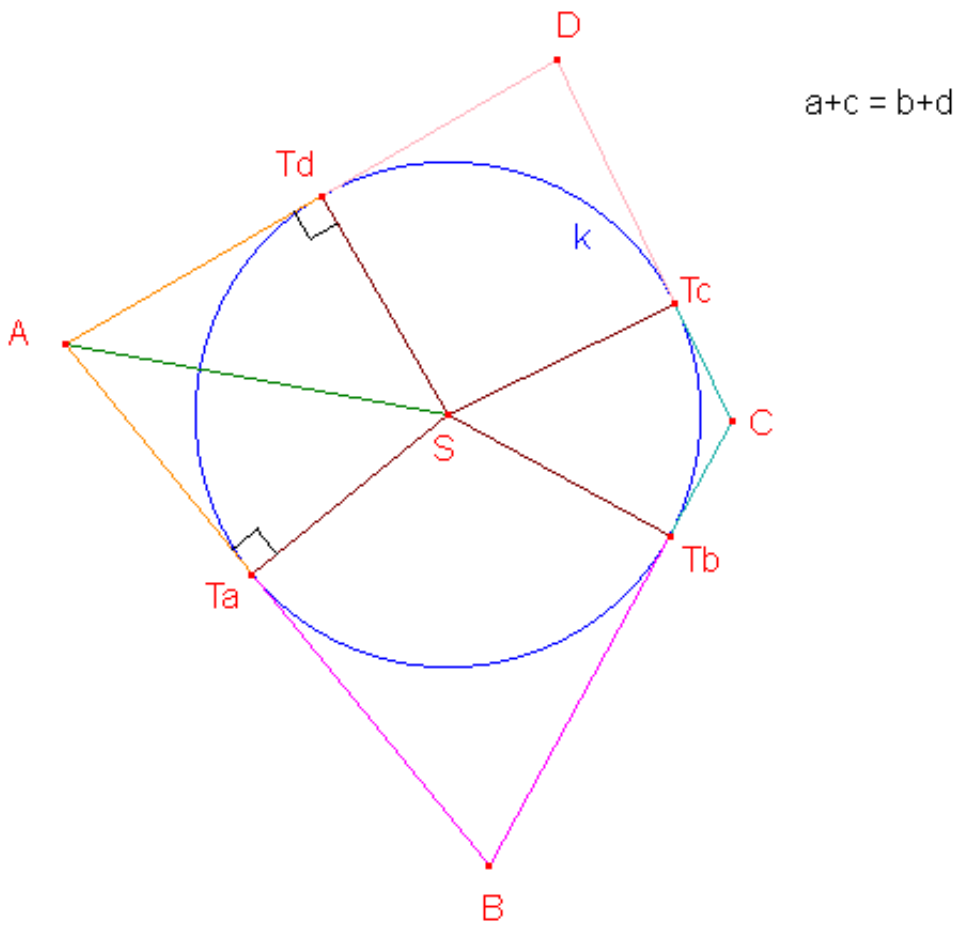
Průsečík osy strany s osou úhlu na kružnici opsané trojúhelníku



Obrázek 2.7: Situace v trojúhelníku ABC

Označíme-li P ten průsečík osy strany AB trojúhelníku ABC s kružnicí jemu opsanou, který neleží v polorovině ABC, lze s využitím vlastností obvodových úhlů a rovnoramenných trojúhelníků ukázat, že bod P leží na ose úhlu u vrcholu C. Tato obecná vlastnost, jejíž důkaz není těžký, není příliš známá a studenty obvykle překvapí a je pro ně zajímavá.

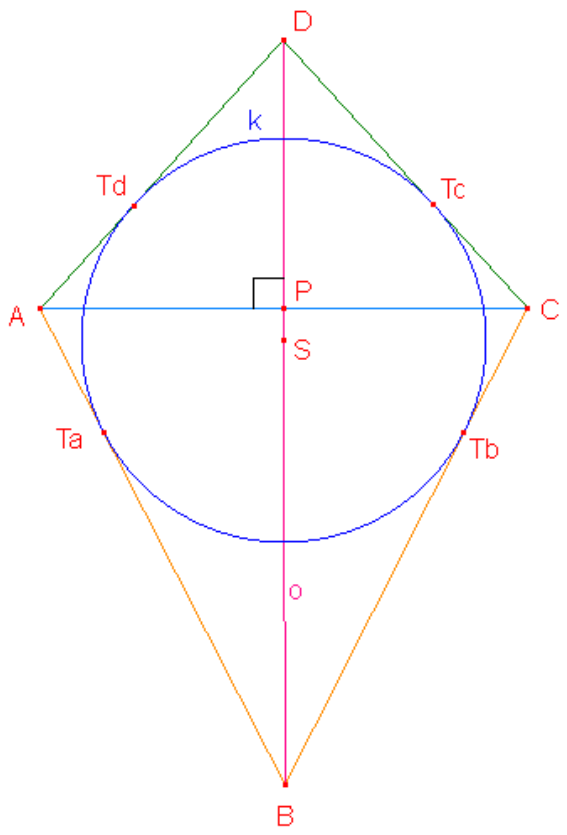
Tečnový čtyřúhelník



Obrázek 2.8: Čtyřúhelník ABCD

Soubor shrnuje vlastnosti tečen vedených daným bodem ke kružnici. Díky barevnému rozlišení student snadno nahlédne důležitou vlastnost, že v každém tečnovém čtyřúhelníku musí být součet protějších stran stejný. Je důležité studentům zdůraznit, že platí i opačná implikace.

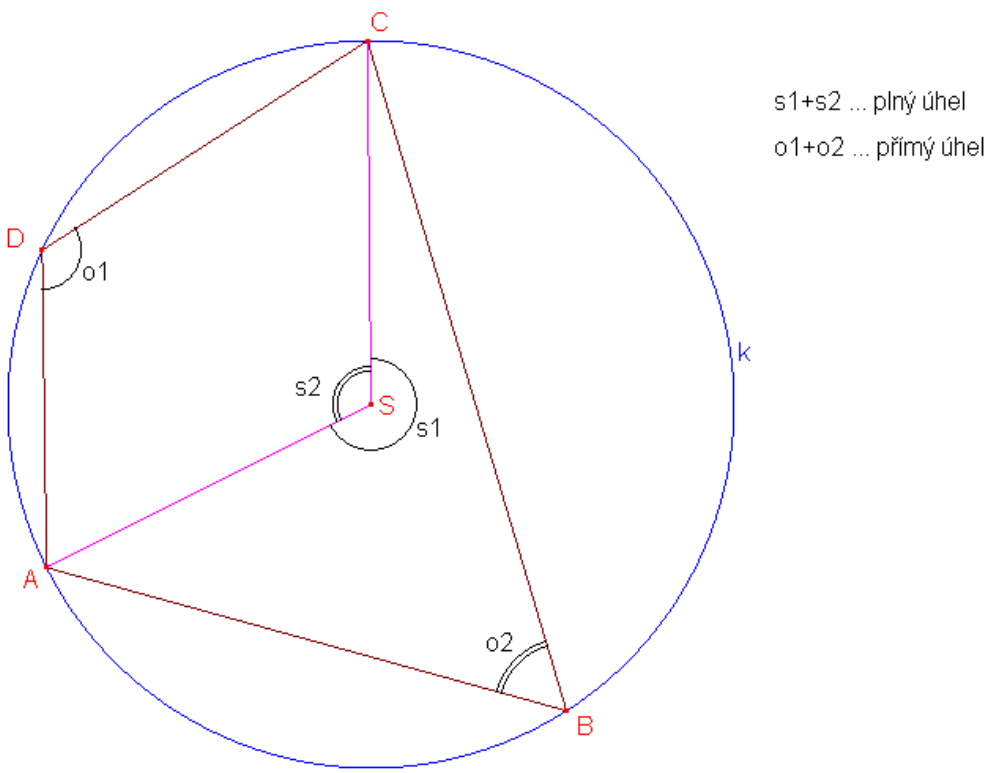
Vlastnosti deltoidu



Obrázek 2.9: Deltoid ABCD

Užitím výše popsané obecné vlastnosti tečnového čtyřúhelníku se snadno přesvědčíme, že každému deltoidu lze vepsat kružnici. Poté můžeme ukázat další vlastnosti deltoidu – kolmost úhlopříček a skutečnost, že tento útvar je osově souměrný podle jedné z nich.

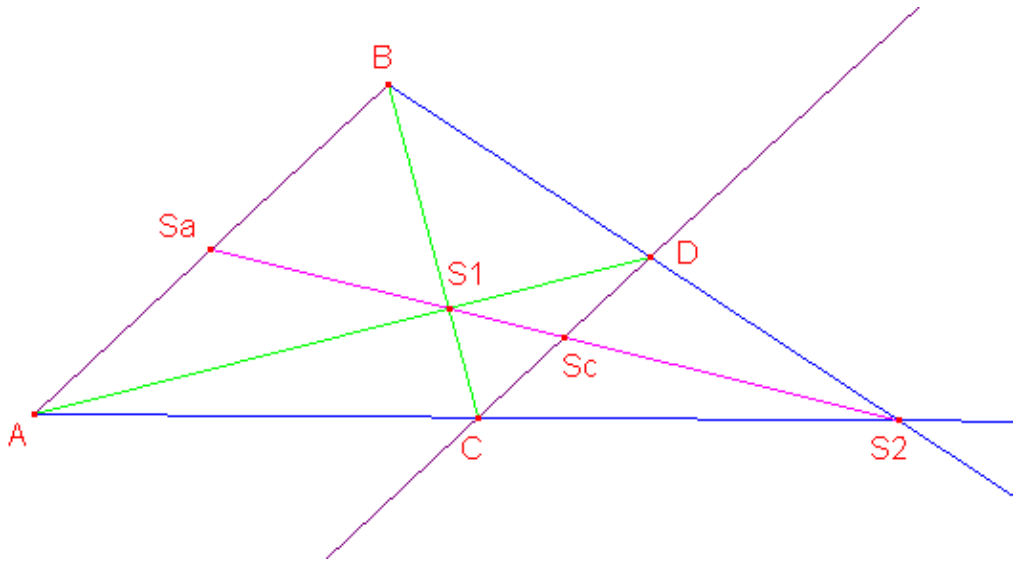
Tětivový čtyřúhelník



Obrázek 2.10: Tětivový čtyřúhelník

Soubor tématicky navazuje na vlastnosti středových a obvodových úhlů. S jeho využitím studentům ukážeme, že v každém tětivovém čtyřúhelníku musí být součet protějších úhlů stejný a to 180°. Také zde je třeba studenty upozornit, že se jedná o podmínku nutnou i dostatečnou.

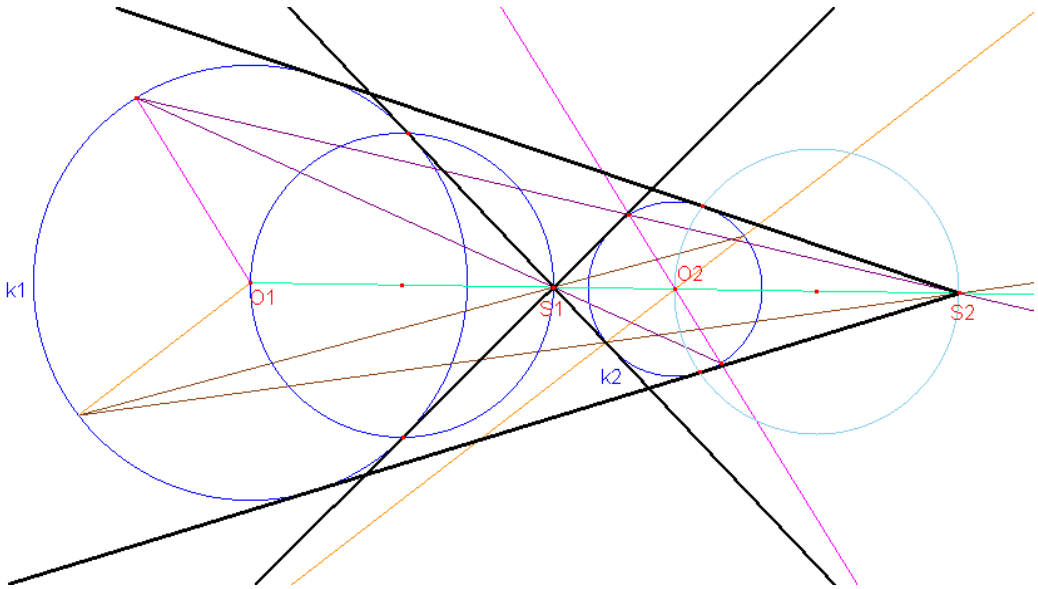
Stejnolehlost úseček



Obrázek 2.11: Stejnolehlé úsečky AB, CD

Zde můžeme diskutovat jakým způsobem se na sebe mohou ve stejnolehlosti zobrazit 2 rovnoběžné úsečky. Povšimněme si přitom, že středy úseček se musí zobrazit na sebe a leží na jedné přímce společně se středy stejnolehlostí převádějících jednu úsečku ve duhou. Tyto úvahy jsou průpravou ke studiu stejnolehlosti dvou kružnic.

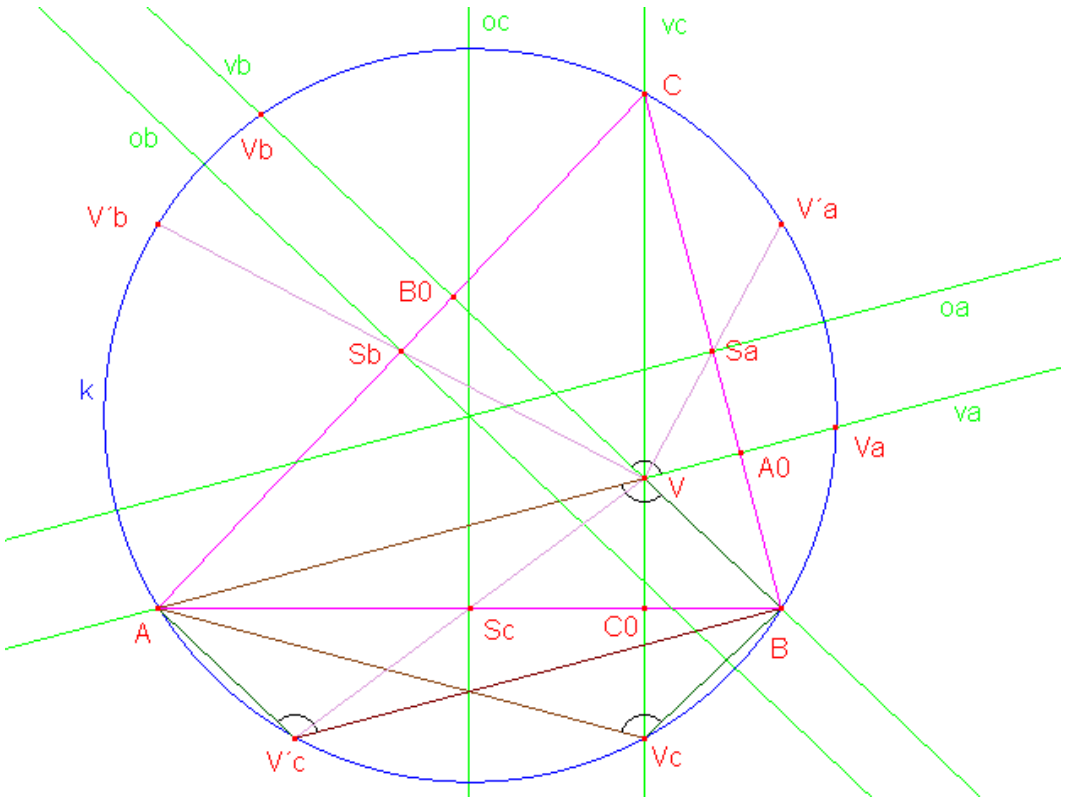
Stejnolehlost kružnic



Obrázek 2.12: Stejnolehlé kružnice k1 a k2

Zobrazíme-li ve stejnolehlosti dva rovnoběžné průměry obou uvažovaných kružnic, najdeme středy příslušných stejnolehlostí, které převádějí jednu kružnici ve druhou. Těmito body pak musí procházet také společné tečny obou kružnic. Ty pak lze již snadno sestrojit pomocí Thaletovy kružnice (viz Tečny z bodu ke kružnici). Pohybem kružnic pak můžeme měnit jejich vzájemnou polohu (případně i poloměry) a studovat počty existujících společných tečen v jednotlivých případech.

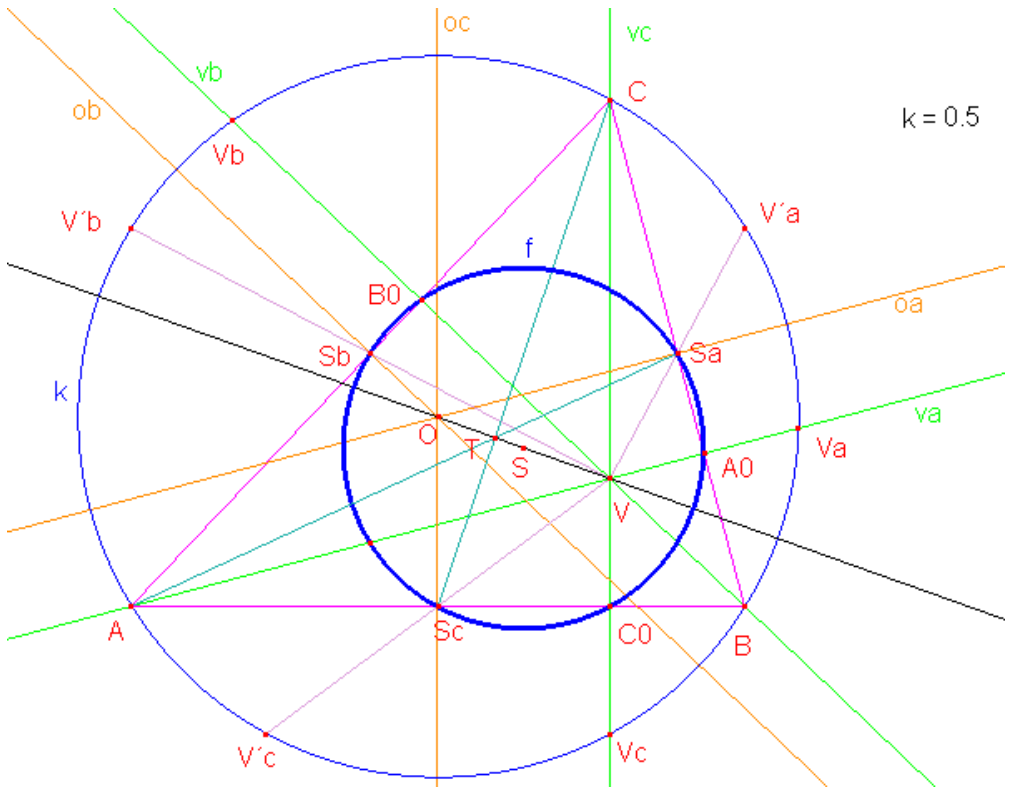
Obrazy ortocentra na kružnici opsané



Obrázek 2.13: Obrazy ortocentra V

V tomto souboru jsou aplikovány vlastnosti tětivových čtyřúhelníků (viz výše) a ukazuje se v něm, proč obrazy ortocentra trojúhelníku jednak ve středových souměrnostech se středy ve středech stran tohoto trojúhelníku a také v osových souměrnostech, jejichž osami jsou přímky určené stranami tohoto trojúhelníku, leží na kružnici opsané tomuto trojúhelníku.

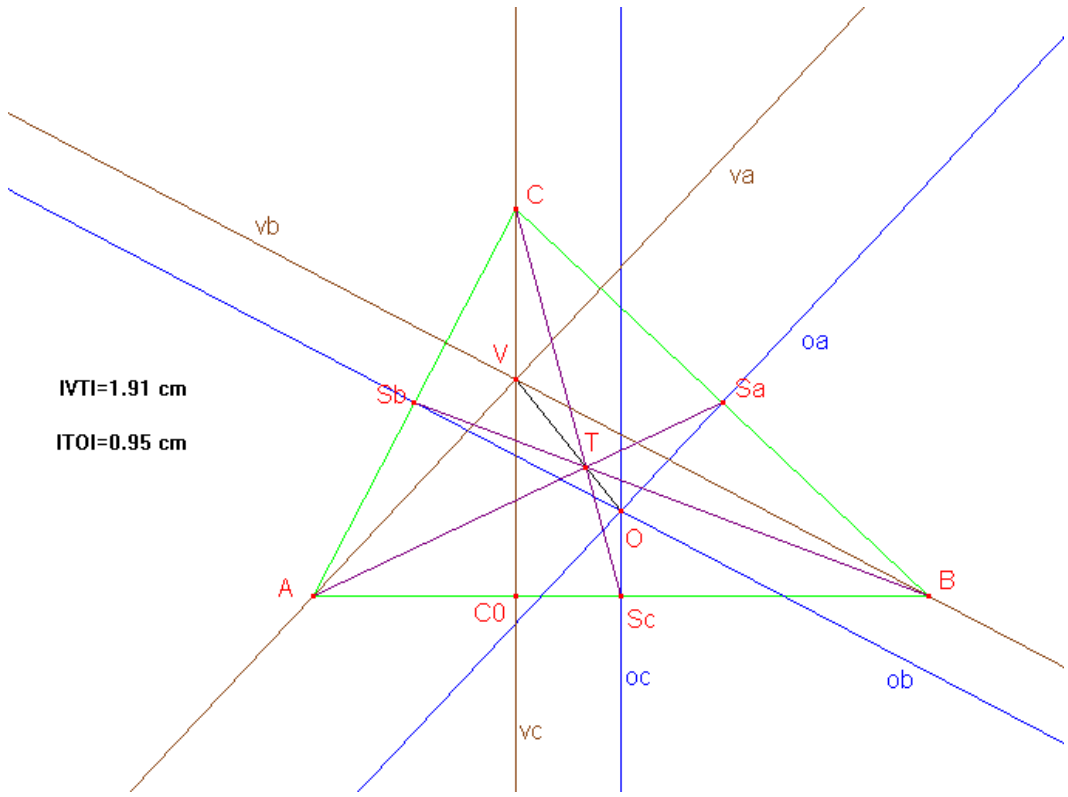
Feuerbachova kružnice



Obrázek 2.14: Kružnice devíti bodů

Zobrazíme-li kružnici opsanou trojúhelníku ve stejnolehlosti se středem v jeho ortocentru a koeficientem 0,5, dostaneme tzv. Feuerbachovu kružnici. Vzhledem k předchozím úvahám (viz obrazy ortocentra na kružnici opsané) jsme schopni zdůvodnit, že na ní leží až 9 bodů: středy stran trojúhelníku, paty jeho výšek a středy úseček spojující ortocentrum s vrcholy tohoto trojúhelníku. Tato problematika je rozšiřujícím učivem. Pro studenty však může být zajímavé zamyslet se nad tím, kolik z těchto devíti bodů může splývat či nad polohou středu Feuerbachovy kružnice na tzv. Eulerově přímce. Díky dynamickému modelu toto studentům lze hezky přiblížit.

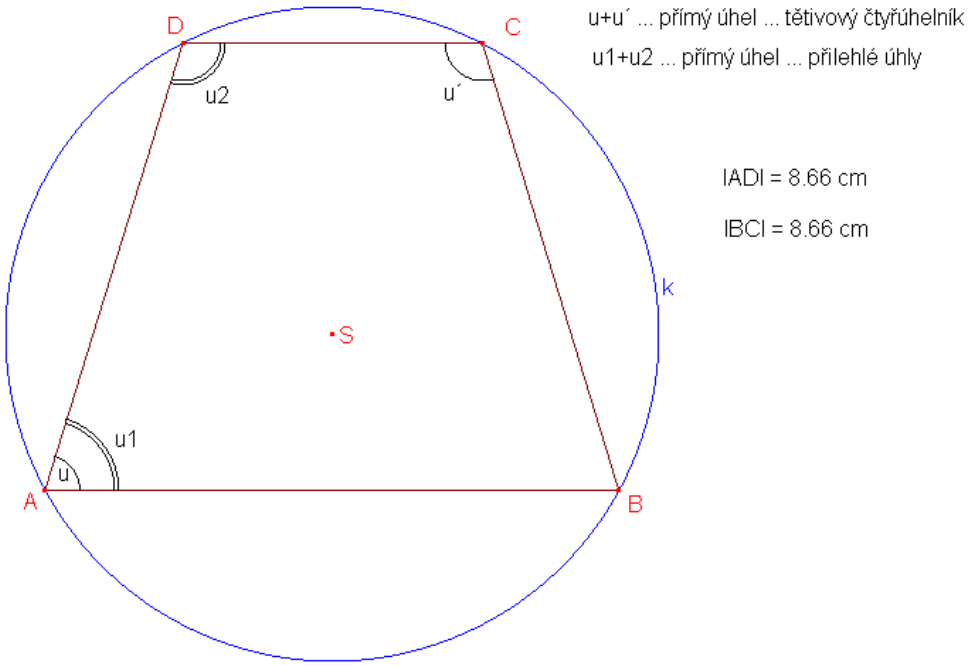
Eulerova přímka



Obrázek 2.15: Eulerova přímka VTO

Základní myšlenkou provedených úvah je zobrazení osy strany trojúhelníku ve stejnolehlosti se středem v těžišti a koeficientem -2. Při této stejnolehlosti se střed strany zobrazí do protějšího vrcholu. Protože obrazem přímky ve stejnolehlosti je rovnoběžka s ní, leží na této přímce výška na příslušnou stranu. Průsečík os stran trojúhelníku se tedy musí zobrazit do průsečíku výšek. Všechny tyto tři body tedy leží na jedné přímce (tzv. Eulerově přímce) a navíc platí, že $|VT| = 2|OT|$.

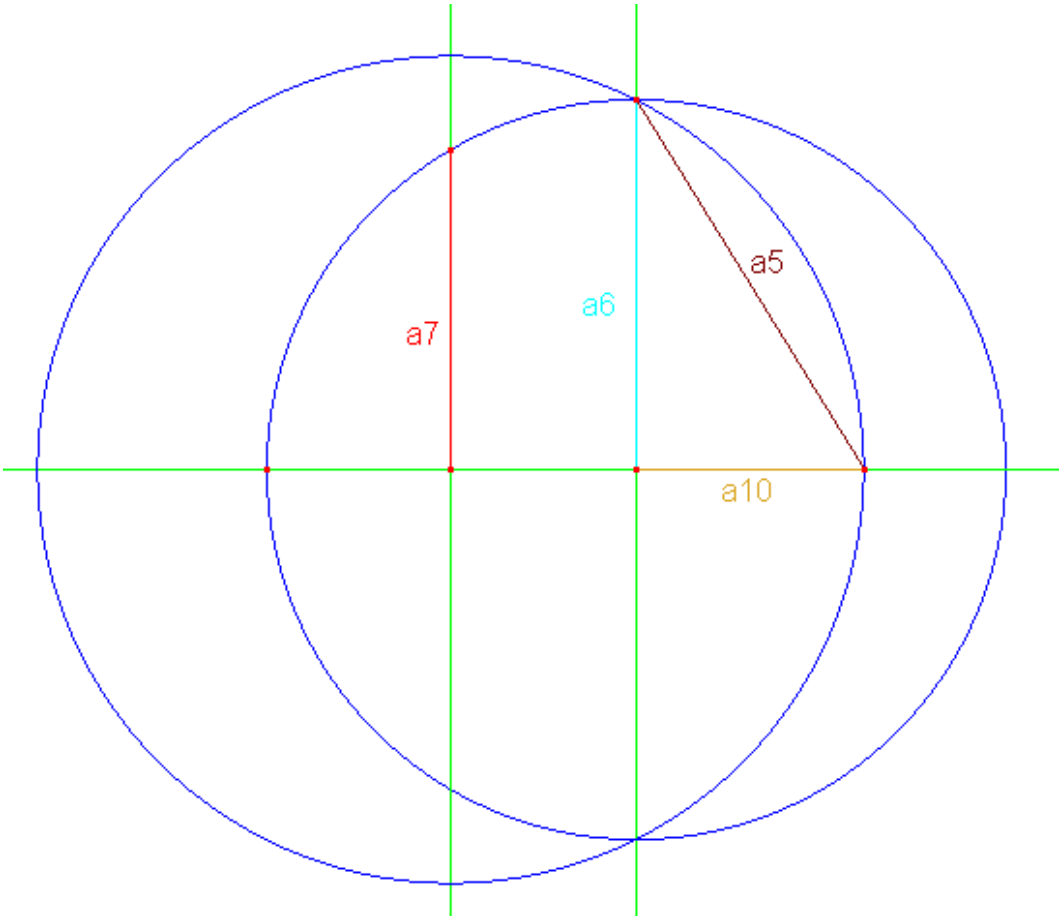
Tětivový lichoběžník



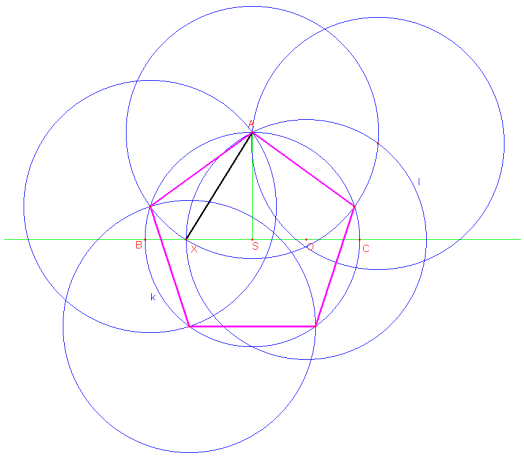
Obrázek 2.16: Lichoběžník ABCD

Další soubor, který aplikuje vlastnosti zmíněné v souboru týkajícím se tětivových čtyřúhelníků. Ukazuje a vysvětluje, proč každý lichoběžník, kterému lze opsat kružnici, musí být rovnoramenný.

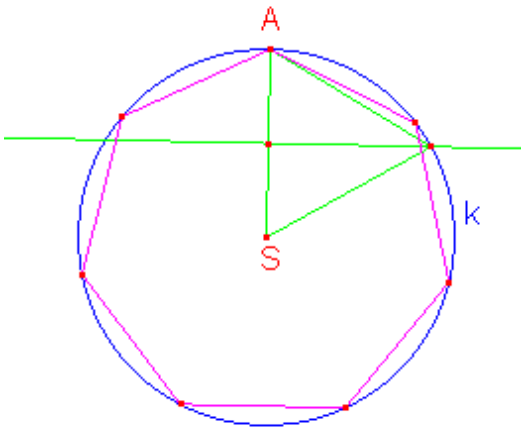
Pravidelné mnohoúhelníky



Obrázek 2.17: Strany pravidelného pěti-, šesti-, sedmi- a desetiúhelníku



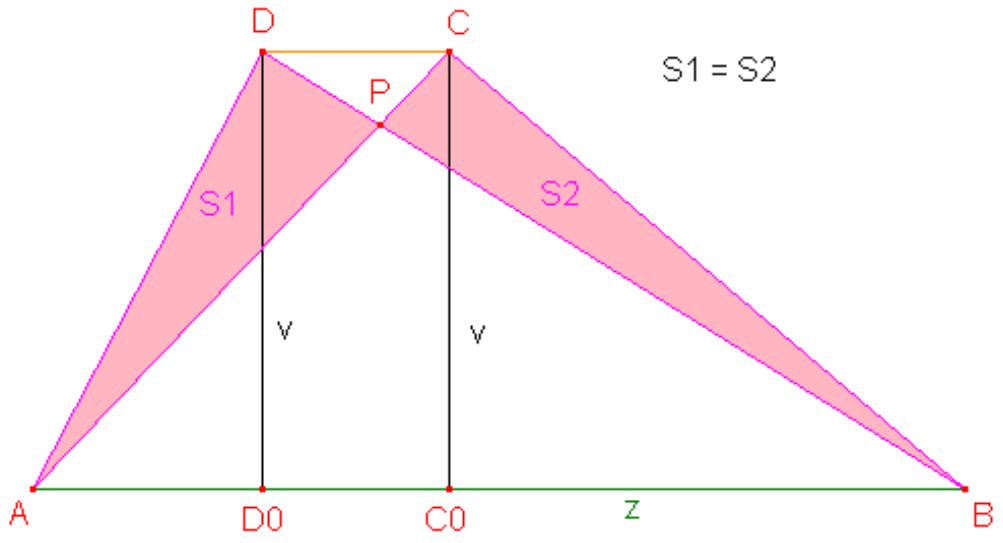
Obrázek 2.18: Pravidelný pětiúhelník



Obrázek 2.19: Pravidelný sedmiúhelník

Ve třech souborech jsou uvedeny některé jednoduché vlastnosti několika pravidelných mnohoúhelníků. Délky stran pravidelného pětiúhelníku, šestiúhelníku a desetiúhelníku se stejnou opsanou kružnicí tvoří délky stran pravoúhlého trojúhelníku. V jiném souboru je provedena konstrukce pravidelného pětiúhelníku. Podobně přibližná konstrukce pravidelného sedmiúhelníku pomocí výšky v rovnostranném trojúhelníku o délce strany, která je poloměrem kružnice opsané tomuto sedmiúhelníku. Toto učivo je na střední škole spíše okrajové, jednotlivé vlastnosti mnohoúhelníků jsou tedy zařazeny spíše motivačně a pouze povrchně.

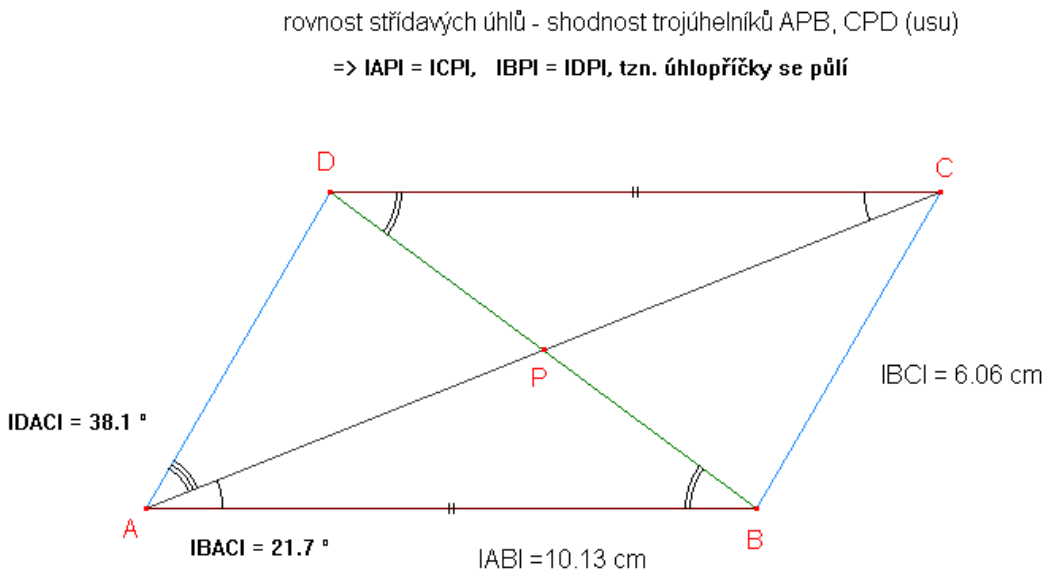
Vlastnosti lichoběžníku



Obrázek 2.20: Lichoběžník ABCD

Pomocí tohoto souboru upozorníme na zajímavou vlastnost lichoběžníku, že vybarvené trojúhelníky musí mít stejný obsah. Opačně pak platí, že z rovnosti obsahů vybarvených trojúhelníků plyne rovnoběžnost stran AB a CD.

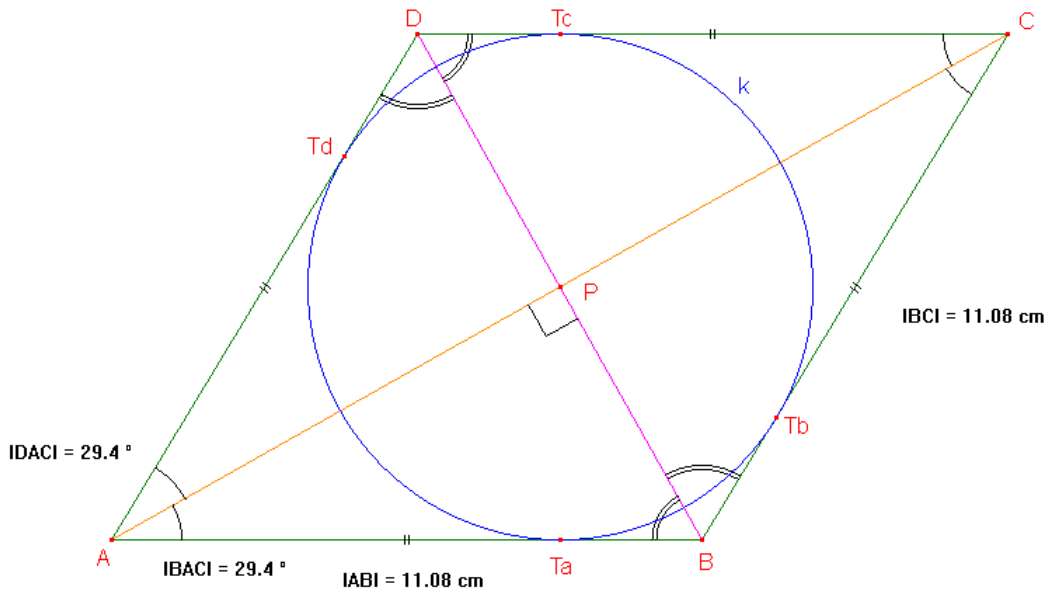
Úhlopříčky v rovnoběžníku



Obrázek 2.21: Úhlopříčky v kosodélníku

V souboru je proveden důkaz skutečnosti, že úhlopříčky v rovnoběžníku se půlí. Dále je nachystán tak, aby se studenti mohli přesvědčit, že úhlopříčka v kosodélníku nepůlí příslušný vnitřní úhel. Pohybem objektů, kdy se kosodélník blíží kosočtverci, si mohou studenti všimnout, že toto tvrzení „začíná platit“.

Úhlopříčky v kosočtverci



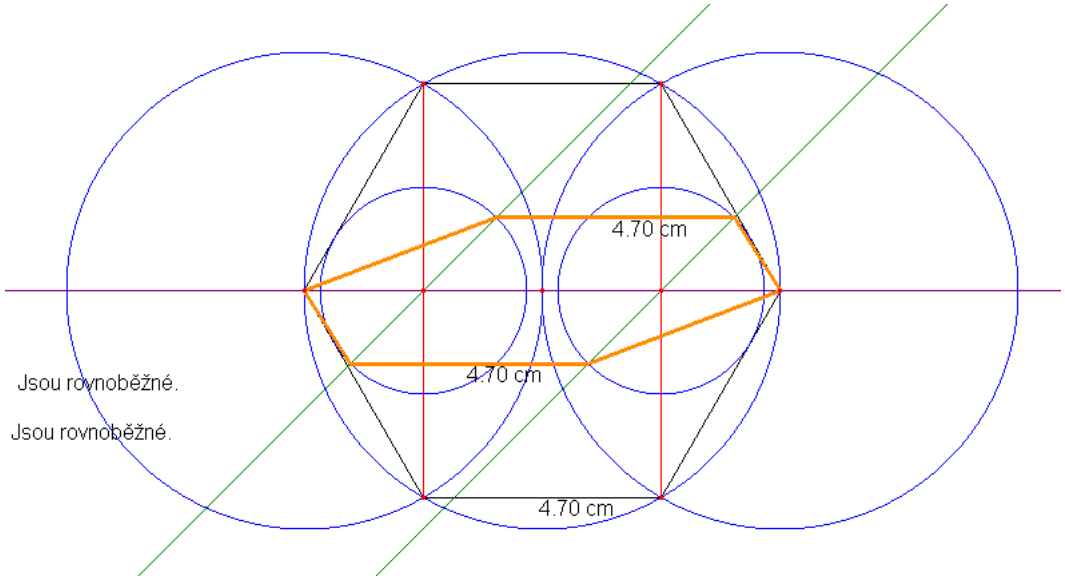
Obrázek 2.22: Úhlopříčky v kosočtverci

Kosočtverec je speciálním typem rovnoběžníku, proto jeho úhlopříčky splňují více vlastností než v obecném rovnoběžníku – navíc jsou na sebe kolmé a také leží na osách vnitřních úhlů. Podklady pro tyto důkazy jsou ve zmíněném souboru. Navíc lze poukázat na skutečnost, že kosočtverec můžeme „rozřezat“ na 4 shodné trojúhelníky se společným vrcholem v průsečíku úhlopříček. Také si lze povšimnout toho, že každý kosočtverec je tečnovým čtyřúhelníkem.

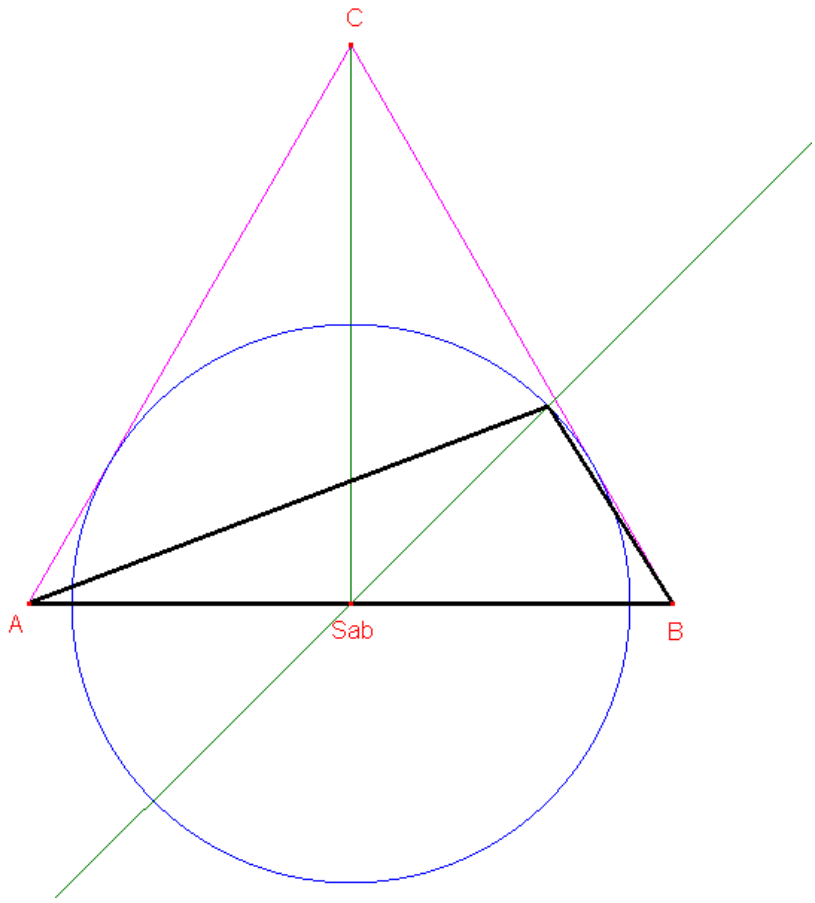
Předložené materiály slouží jednak ke skupinové práci v hodinách – výklad učitele a dále k samostatné práci studentů – pracovní listy a konečně jako kontrola výsledků práce studentů, podklady pro detailní rozbor jednotlivých úloh v Cabri s využitím výše popsaných nástrojů.

3.1 Základní vlastnosti volného rovnoběžného promítání

Pro úvodní úvahy sloužící jako pomůcka ke zobrazení těles jsou připraveny dva soubory. V prvním je ukázáno, jak dle zásad volného rovnoběžného promítání uvedených ve středoškolské učebnici Stereometrie zobrazit rovnostranný trojúhelník, ve druhém souboru pak pravidelný šestiúhelník. Zobrazení těchto útvarů studentům obvykle dělá potíže, mají-li pracovat s tělesy, jejichž podstavu tvoří některý ze zmíněných n-úhelníků.



Obrázek 3.1: Pravidelný šestiúhelník

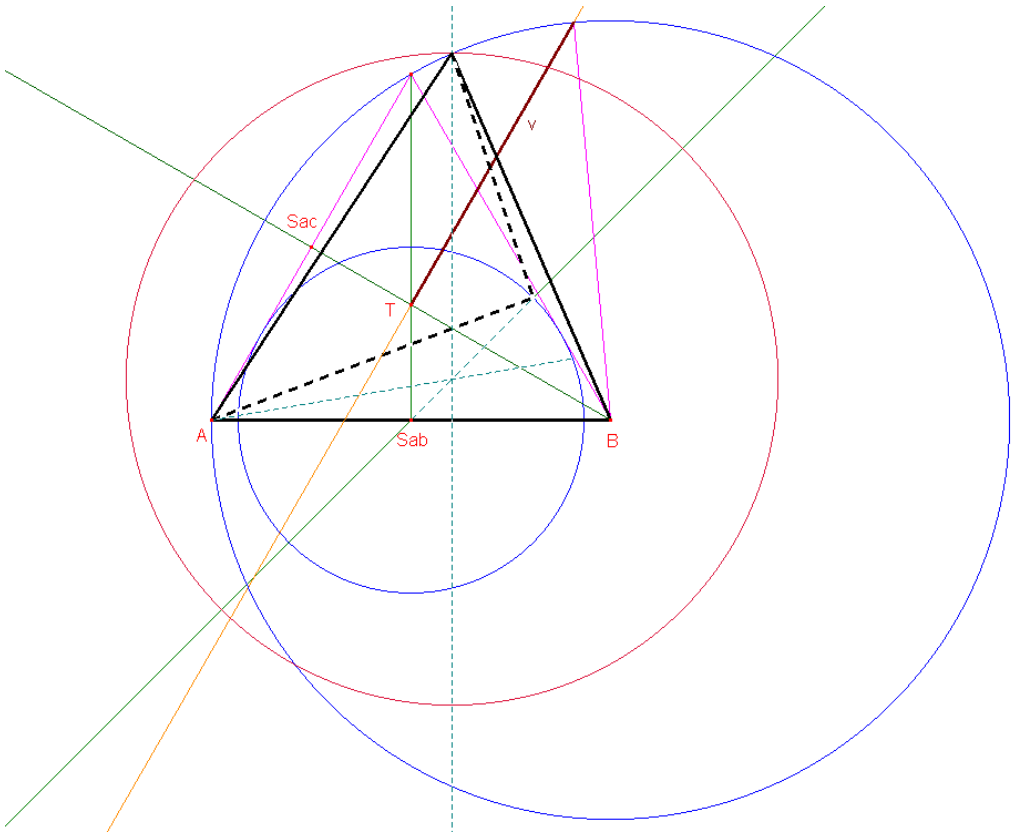


Obrázek 3.2: Rovnostranný trojúhelník

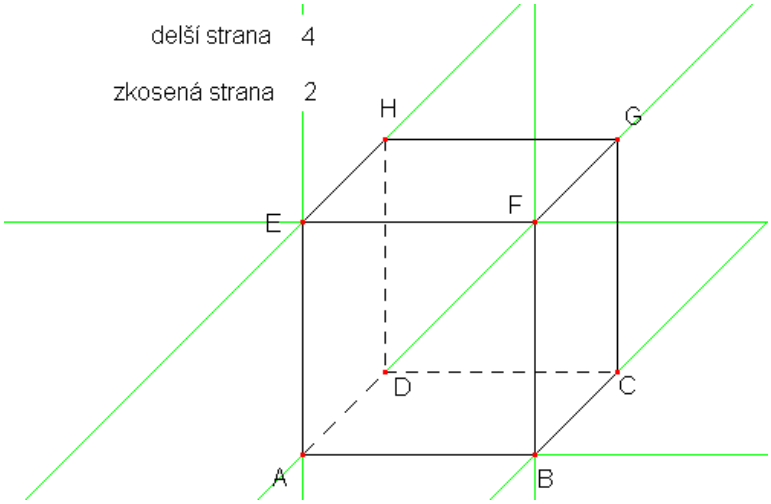
3.2 Tělesa

Většina probíraných stereometrických vlastností se cvičí v tělesech. V jednotlivých souborech jsou připraveny „šablony“ užívaných těles – krychle, pravidelný čtyřboký jehlan, pravidelný trojboký jehlan, pravidelný čtyřstěn, pravidelný šestiboký hranol, pravidelný

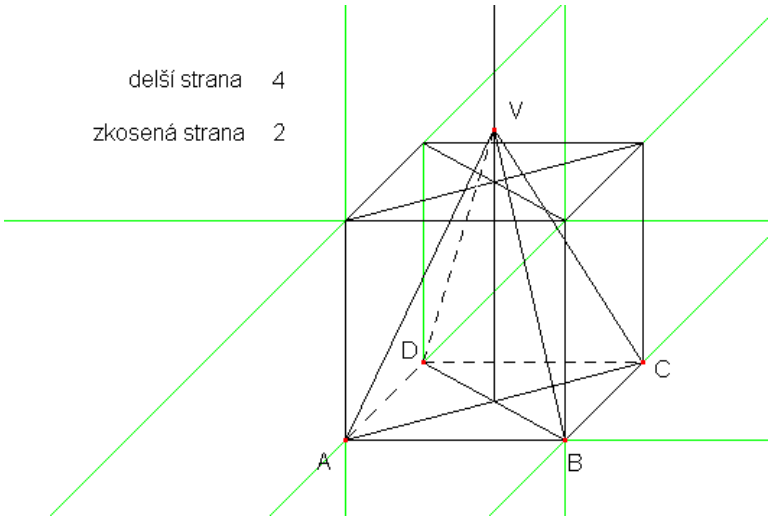
šestiboký jehlan. V případě zájmu z nich je navíc možné velmi jednoduše (např. změnou číselných hodnot délek hran) vytvořit tělesa dalších typů – např. z krychle kvádr. Jednou z možností je vykopírovat je, vložit do wordovského dokumentu a připravit tak studentům pracovní list či písemnou práci. Další možností práce s nimi je jejich využití s výše popsanými nástroji Cabri při studiu řezů či jiných polohových případně metrických úloh. Ve všech těchto případech je základem jisté těleso, ve kterém se příslušné úvahy odehrávají. Tato tělesa tedy není třeba pokaždé znovu konstruovat, což šetří nemálo času.



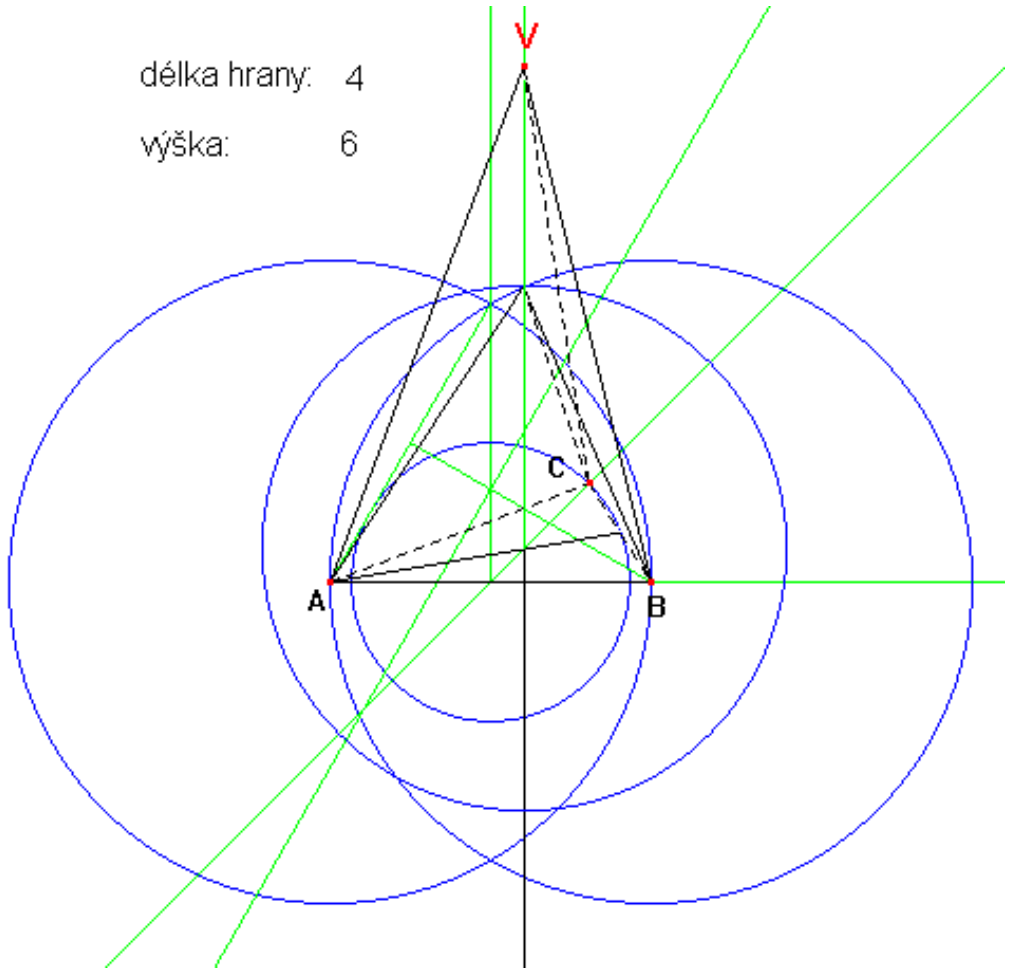
Obrázek 3.3: Pravidelný čtyřstěn



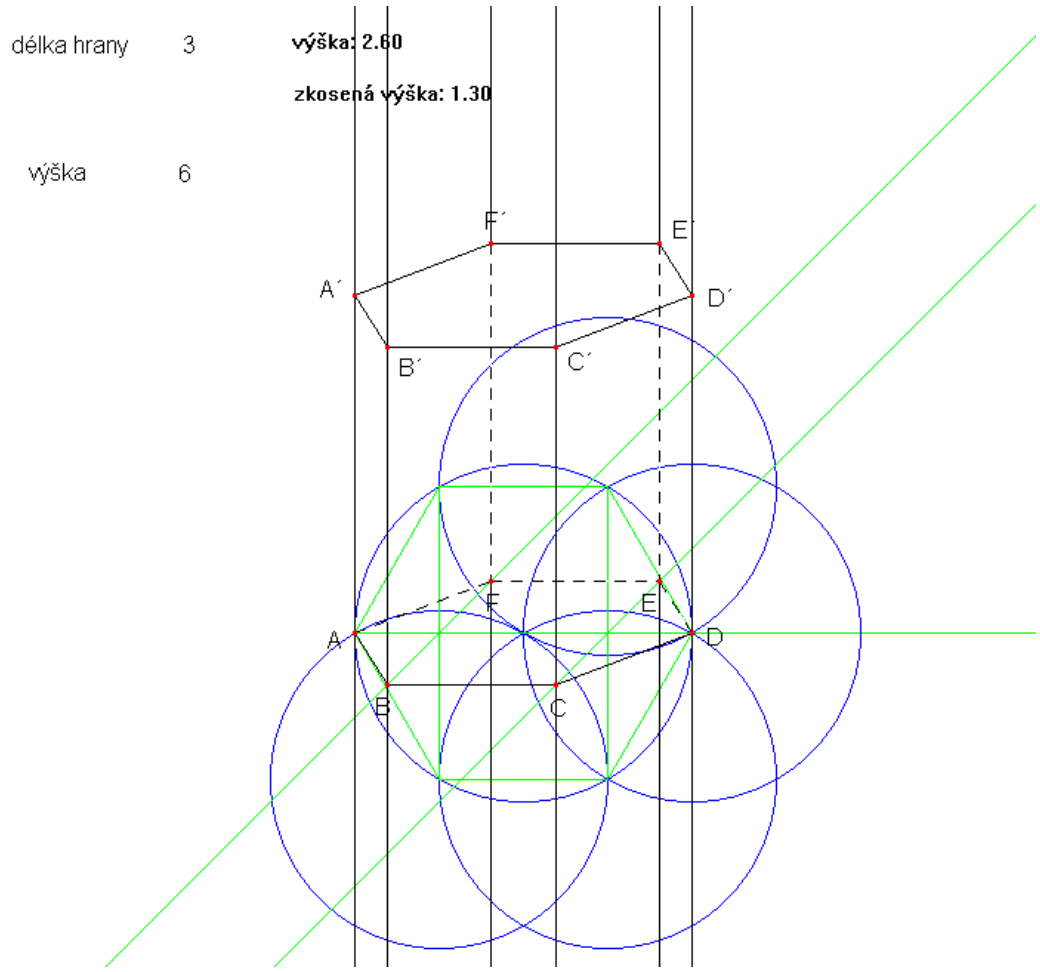
Obrázek 3.4: Krychle



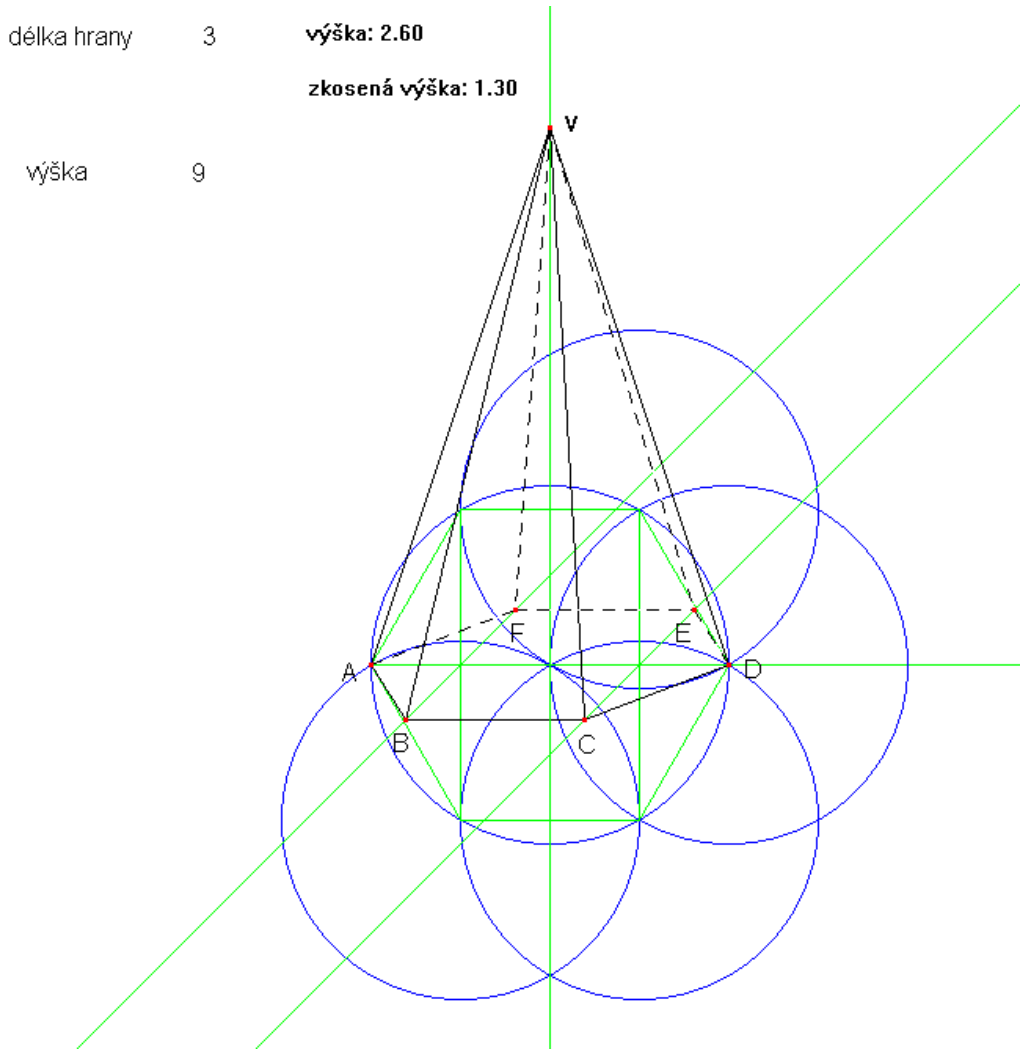
Obrázek 3.5: Čtyřboký jehlan



Obrázek 3.6: Pravidelný trojboký jehlan



Obrázek 3.7: Šestiboký hranol

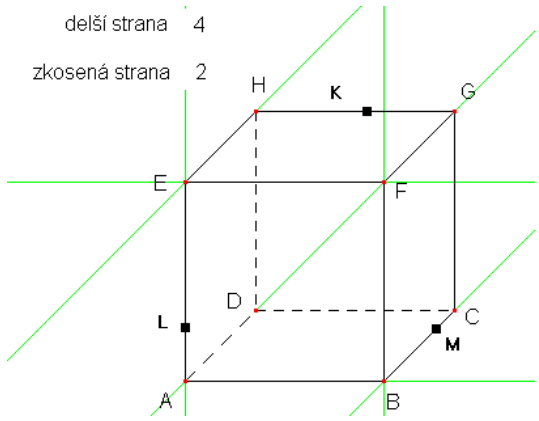


Obrázek 3.8: Šestiboký jehlan

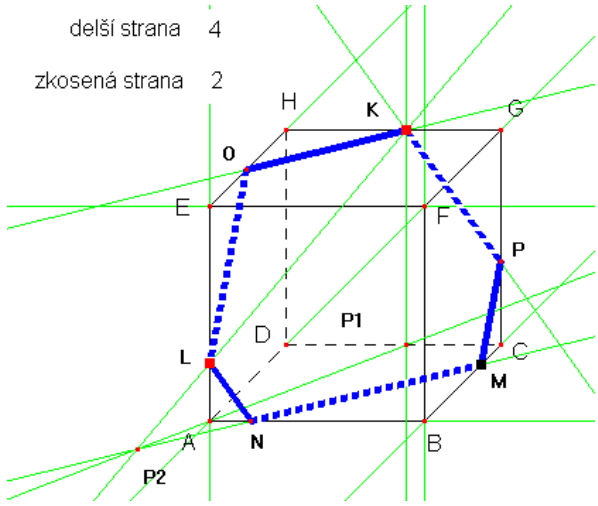
3.3 Řezy

V tomto adresáři najdete balík úloh týkajících se řezů těles. V Cabri jsou připraveny dva typy souborů – jeden se zadáním úlohy a druhý s výsledky. V hodině je možné přímo před zraky studentů v Cabri „rýsovat“ do souboru se zadáním, vysvětlovat a zdůvodňovat jim postup. V případě samostatné práce či domácího úkolu lze ukázat soubor s výslednou konstrukcí pro rychlou kontrolu. Při změně polohy jednotlivých bodů se obrázek překresluje. Se studenty je možné tuto problematiku diskutovat a procvičovat. Jednotlivá zadání jsou připravena tak, aby se pokud možno lišila a každá úloha tak mohla být pro studenty něčím zajímavá a přínosná. Dále v tomto balíku následují další úlohy týkající se sestrojení průniku přímky a tělesa, průsečíků přímky a roviny a prosečnice dvou rovin. Výchozí úvahou každé z těchto úloh je sestrojení jistého řezu tělesa nějakou rovinou. Jednotlivé obrázky lze vložit do wordovských dokumentů a tvoří tak pracovní listy, které lze použít přímo pro studenty (stačí je nakopírovat). V těchto dokumentech je pak i přesná formulace zadání jednotlivých úloh. U obtížnějších úloh je zde též podrobněji zapsán jejich rozbor.

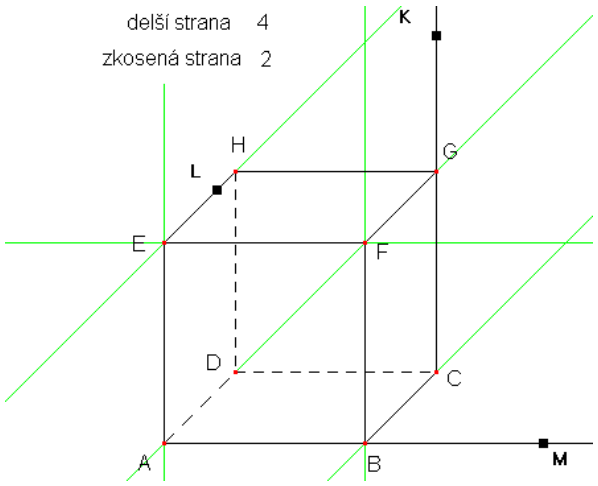
Sestrojte řez krychle rovinou KLM



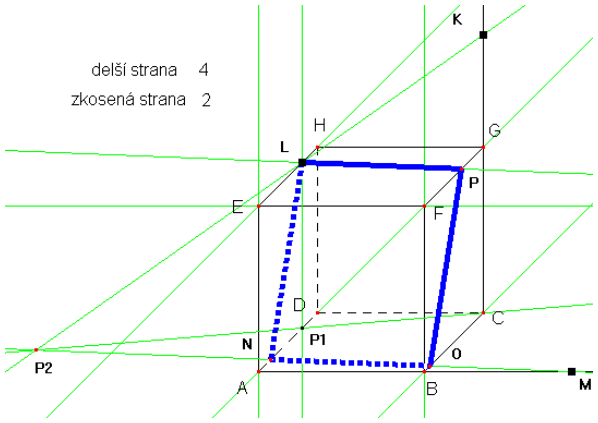
Obrázek 3.9: Příklad č.1



Obrázek 3.10: Řešení příkladu č.1

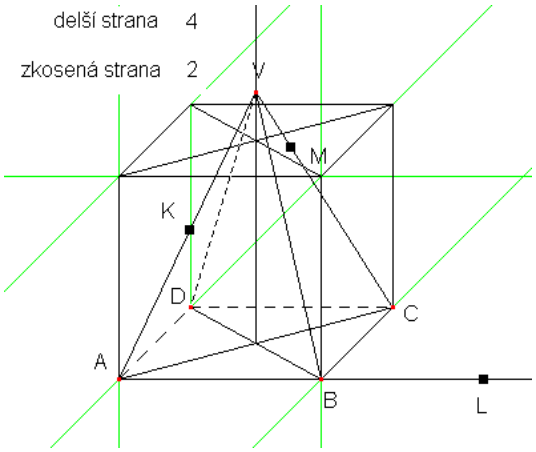


Obrázek 3.11: Příklad č.2

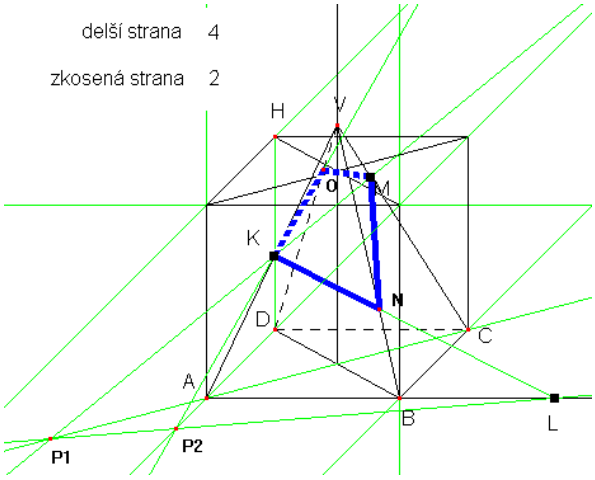


Obrázek 3.12: Řešení příkladu č.2

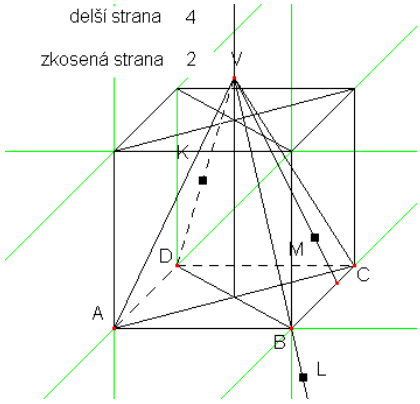
Sestrojte řez jehlanu rovinou KLM



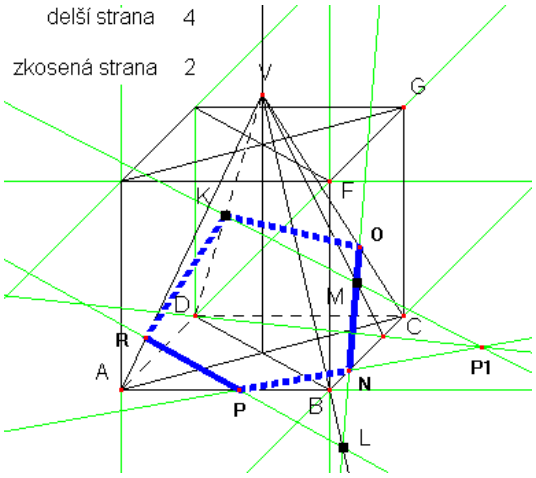
Obrázek 3.13: Příklad č.3



Obrázek 3.14: Řešení příkladu č.3

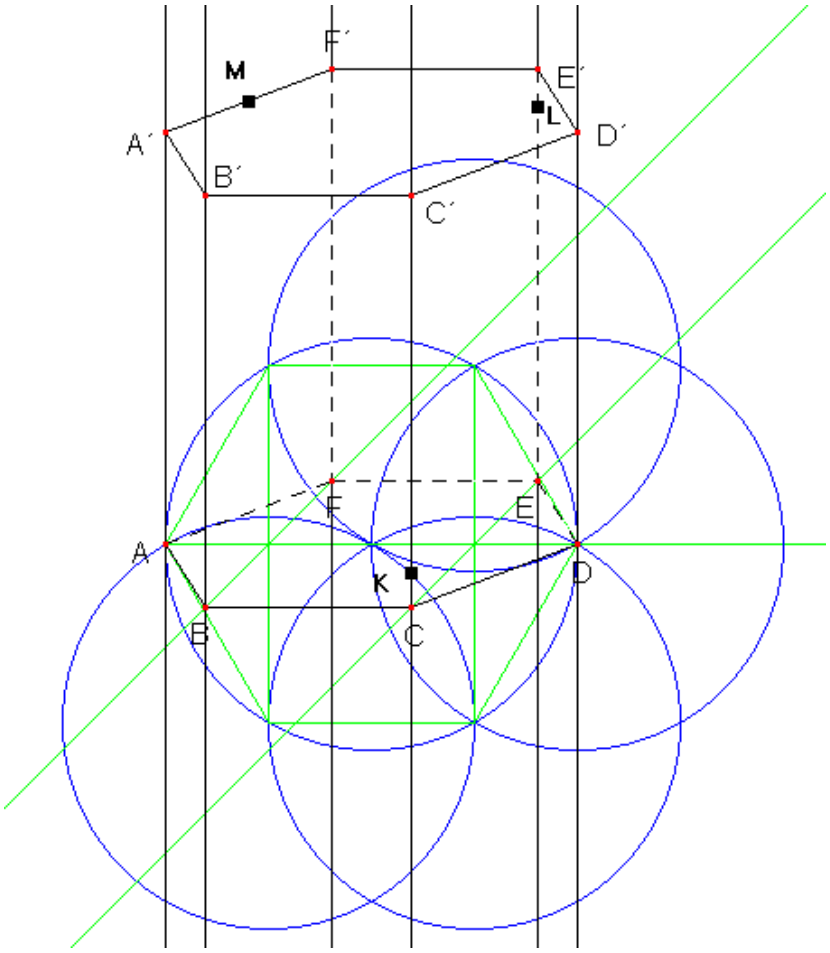


Obrázek 3.15: Příklad č.4

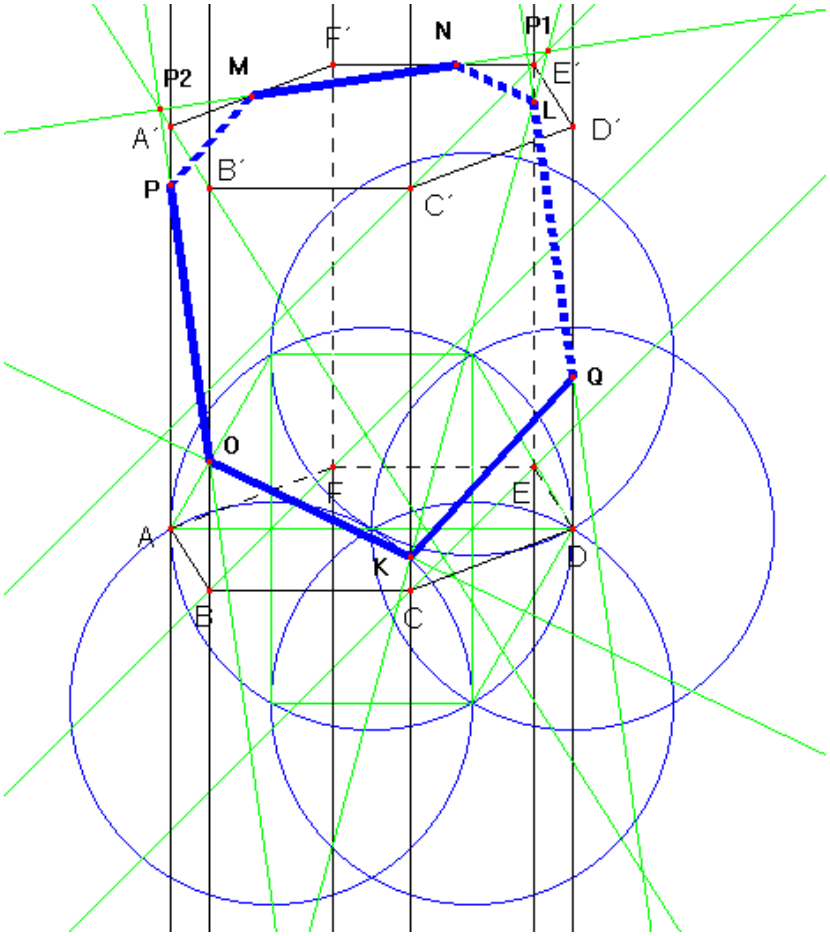


Obrázek 3.16: Řešení příkladu č.4

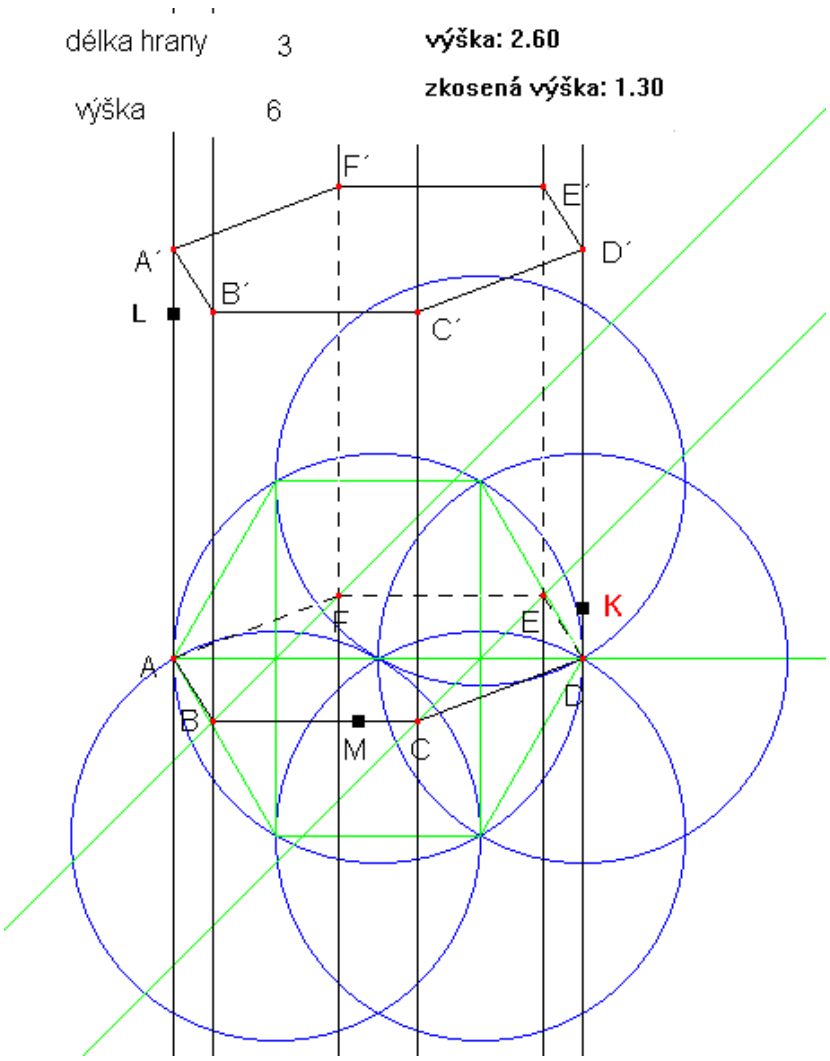
Sestrojte řez hranolu rovinou KLM



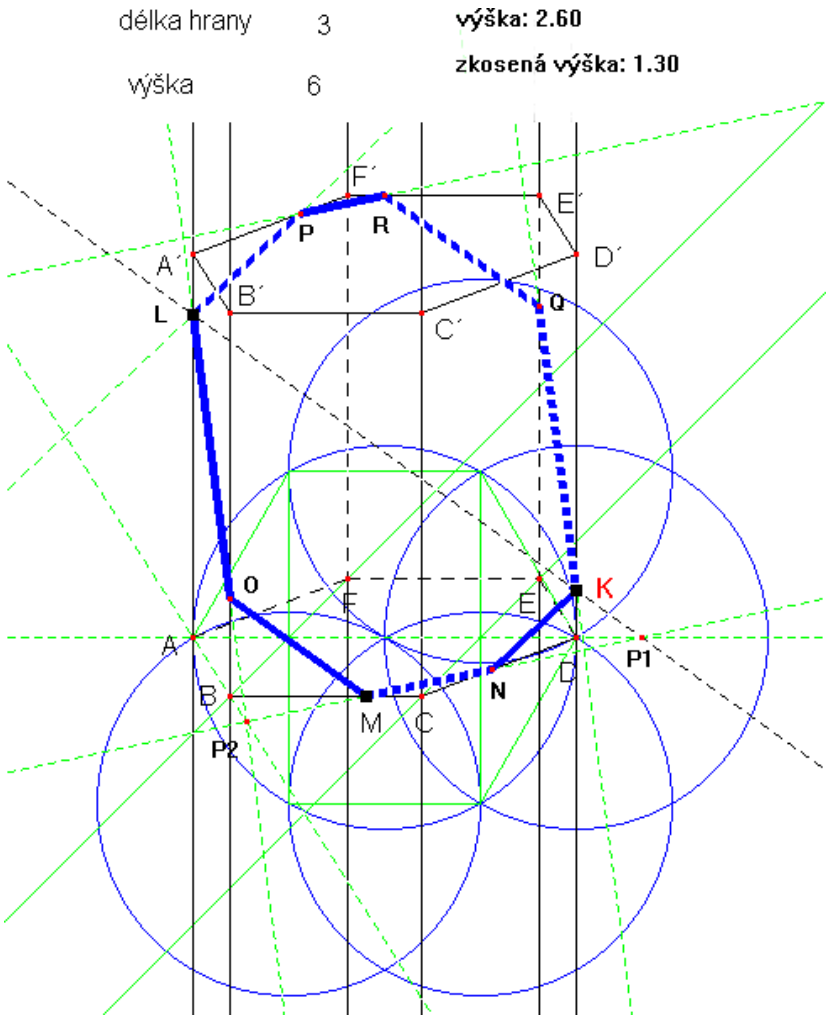
Obrázek 3.17: Příklad č.5



Obrázek 3.18: Řešení příkladu č.5

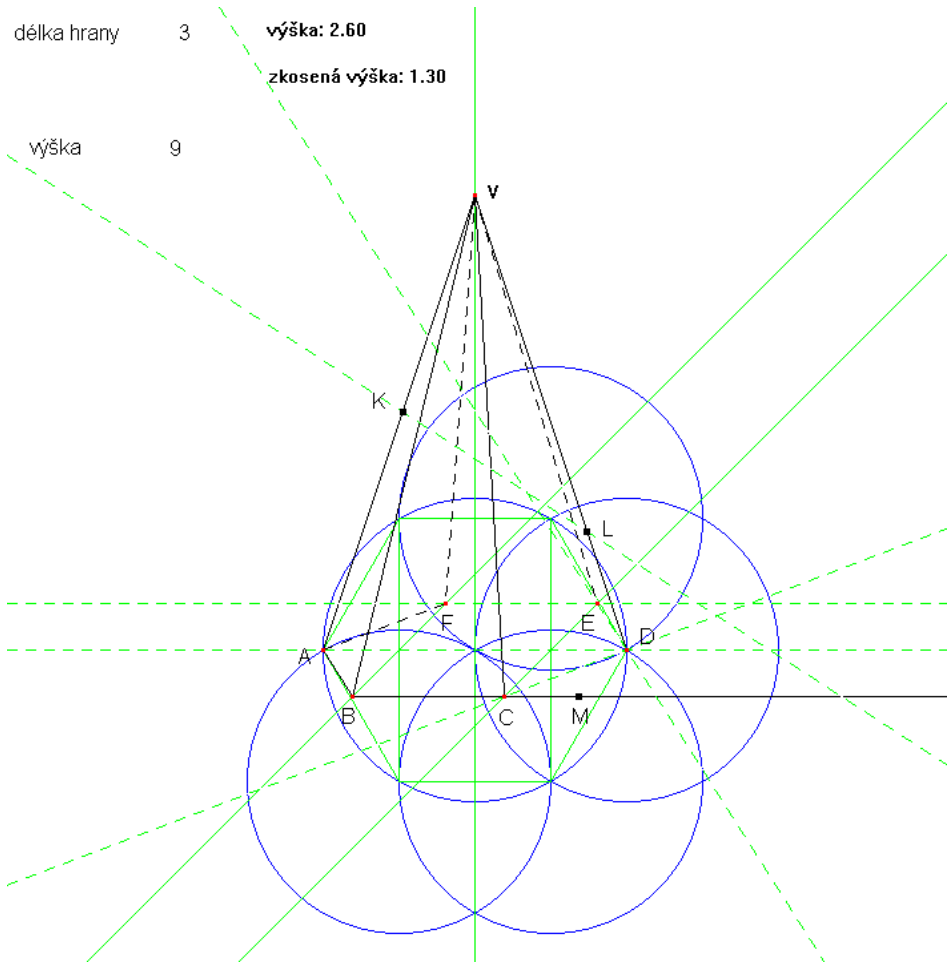


Obrázek 3.19: Příklad č.6

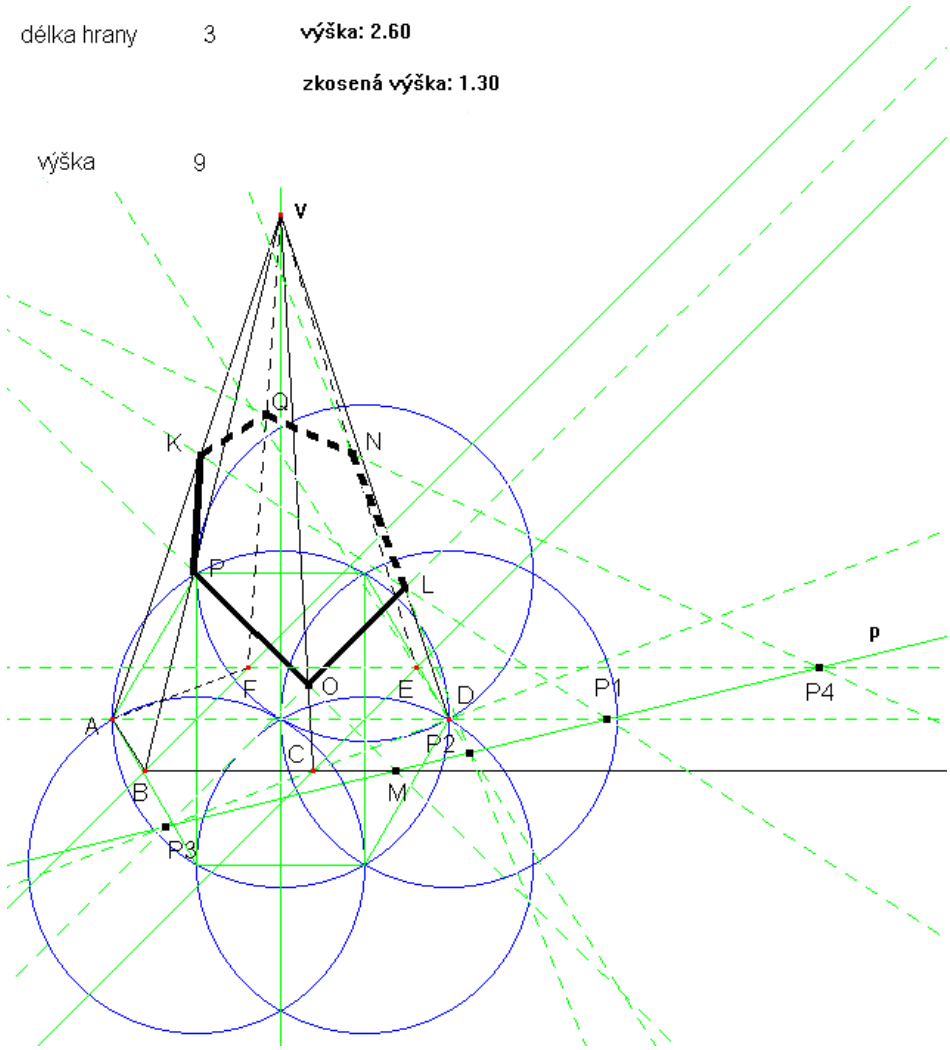


Obrázek 3.20: Řešení příkladu č.6

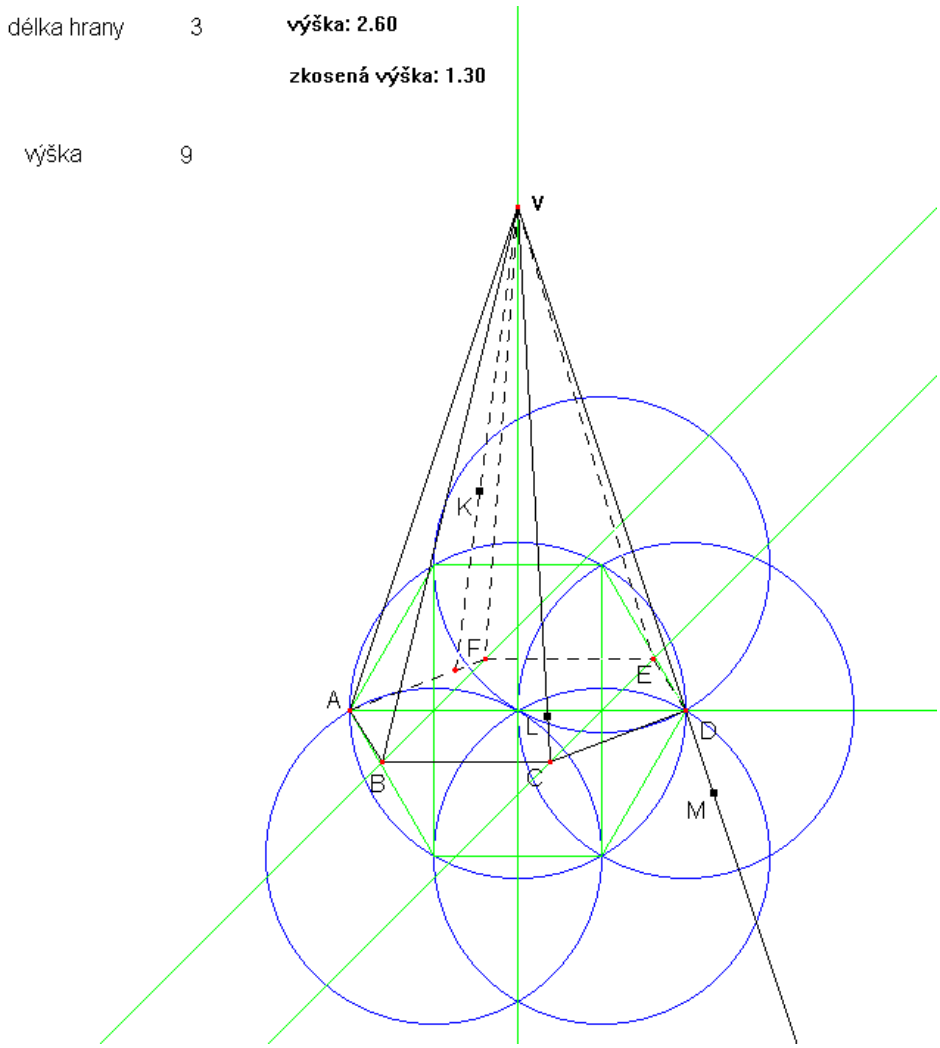
Sestrojte řez šestibokého jehlanu rovinou KLM



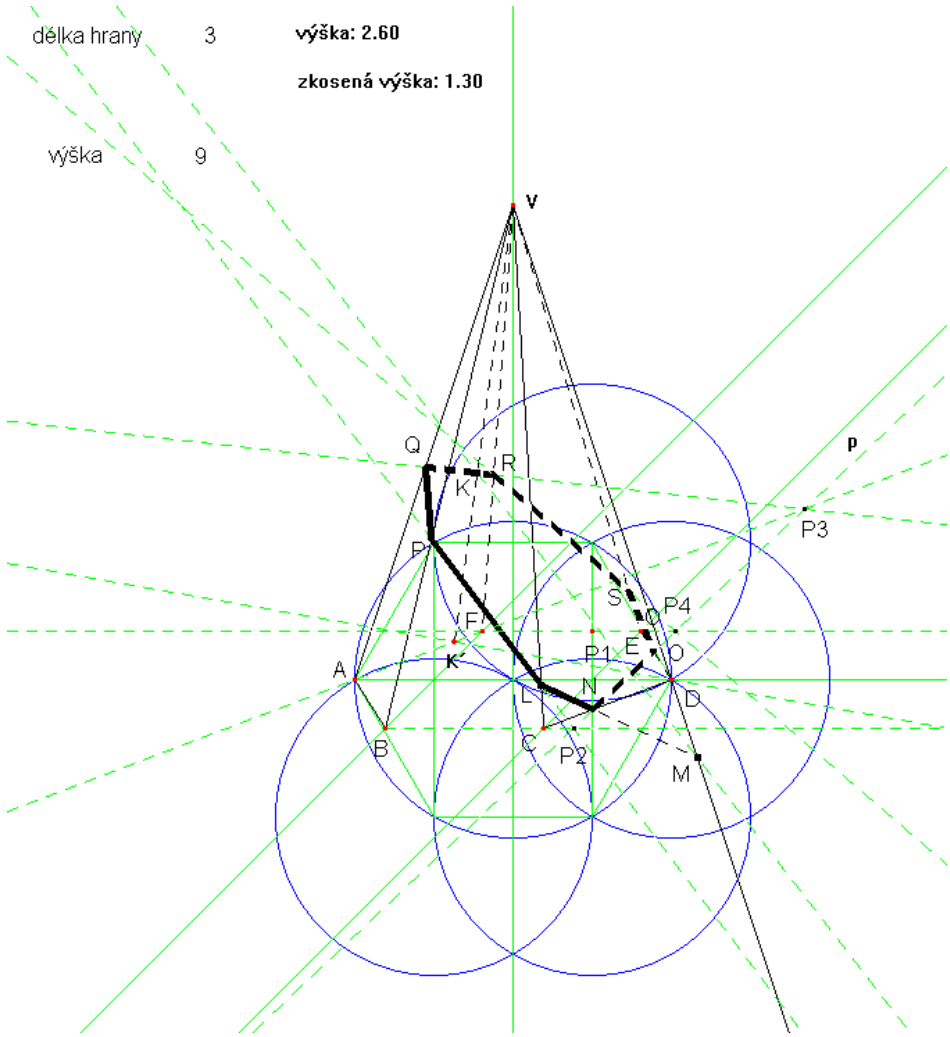
Obrázek 3.21: Příklad č.7



Obrázek 3.22: Řešení příkladu č.7

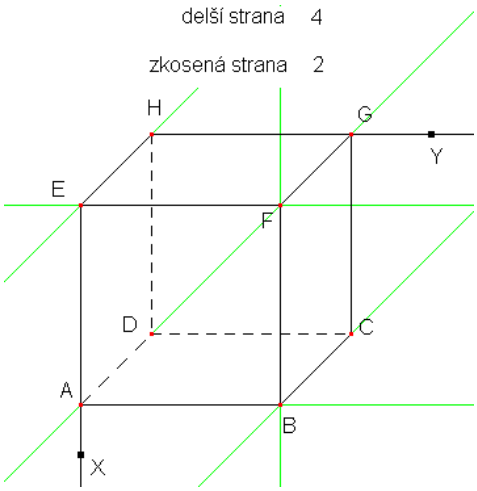


Obrázek 3.23: Příklad č.8

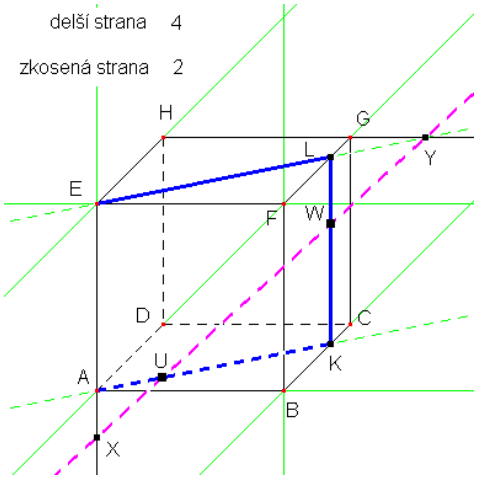


Obrázek 3.24: Řešení příkladu č.8

Najděte průnik přímky XY a krychle

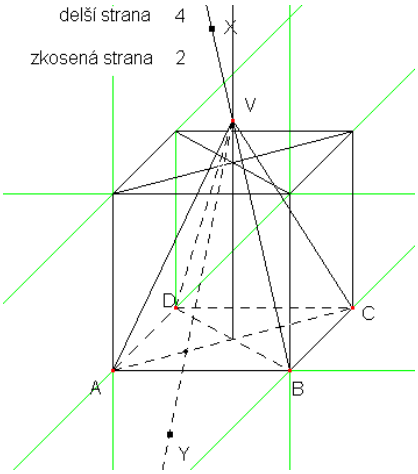


Obrázek 3.25: Příklad č.9

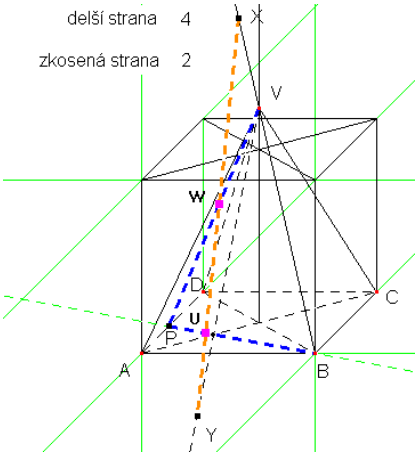


Obrázek 3.26: Řešení příkladu č.9

Najděte průnik přímky XY s jehlanem

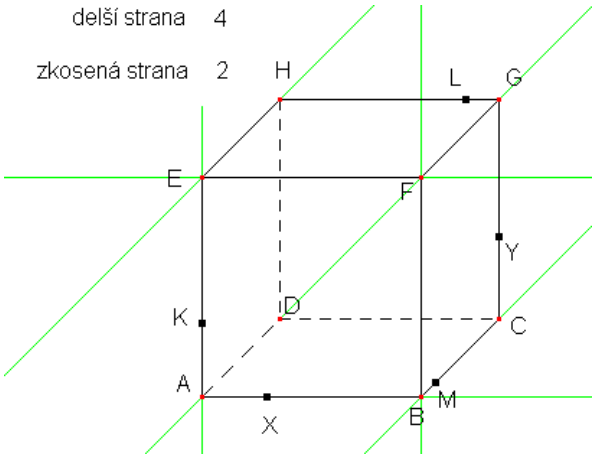


Obrázek 3.27: Příklad č.10

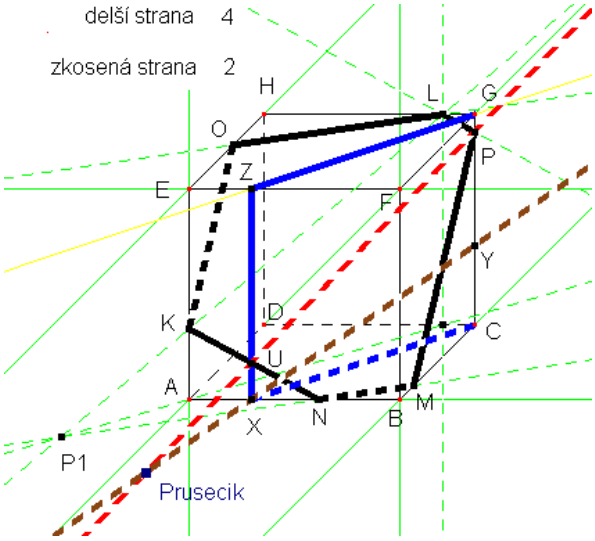


Obrázek 3.28: Řešení příkladu č.10

Sestrojte průsečík roviny KLM a přímky XY



Obrázek 3.29: Příklad č.11

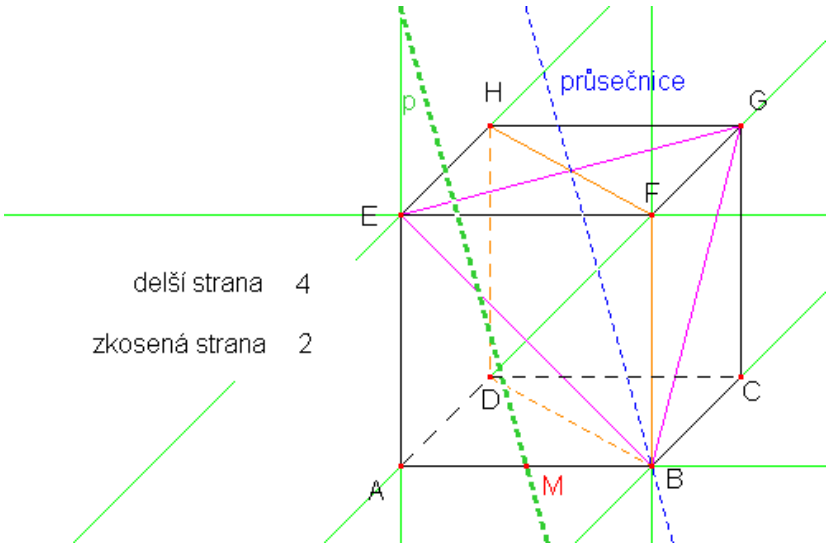


Obrázek 3.30: Řešení příkladu č.11

3.4 Další polohové úlohy

Tento adresář sdružuje několik dalších polohových úloh, které se však netýkají řezů těles. V souboru „polohove ulohy“ je jejich celkový přehled – formulace zadání + obrázek. Rozkrokovat jednotlivé úvahy a diskutovat je se studenty lze výhodně pomocí souborů s jednotlivými úlohami zpracovanými v Cabri.

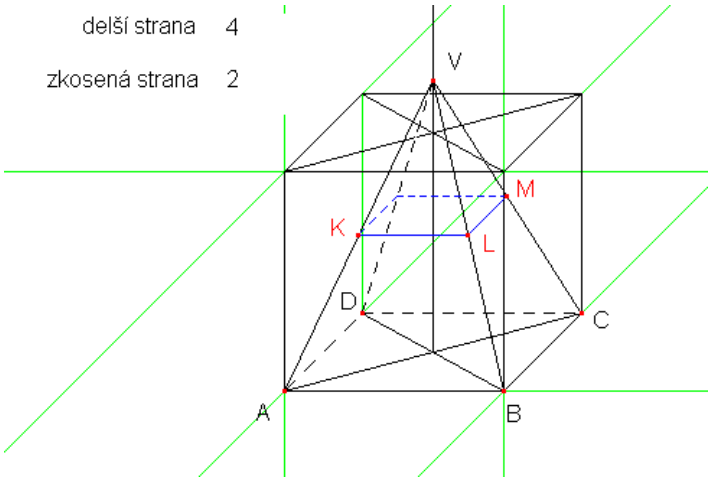
Poloha přímky a dvou rovin



Obrázek 3.31: Přímka p rovnoběžná s dvěma rovinami

Bodem M, který je středem hrany AB krychle $ABCDEFGH$, veďte přímku rovnoběžnou s rovinami BEG a BDH.

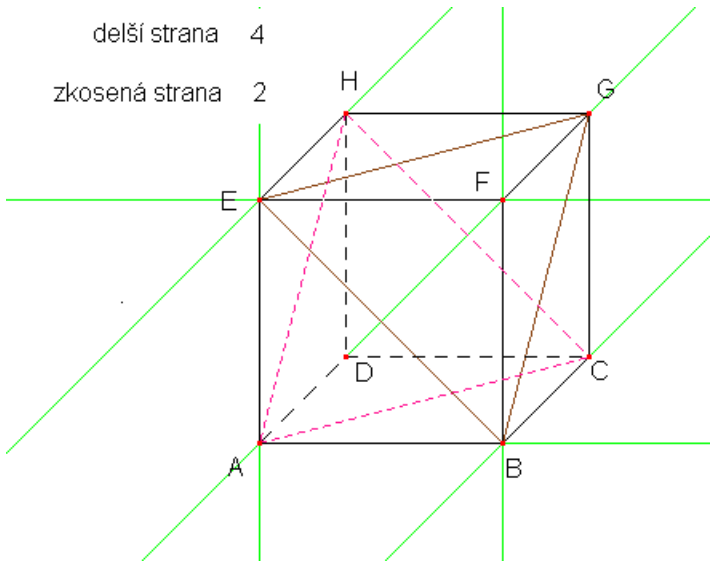
Rovnoběžné roviny



Obrázek 3.32: Jehlan s vyznačenými rovinami

Nechť K, L, M po řadě značí středy hran AV, BV a CV jehlanu $ABCDV$. Dokažte, že roviny KLM a BCD jsou rovnoběžné.

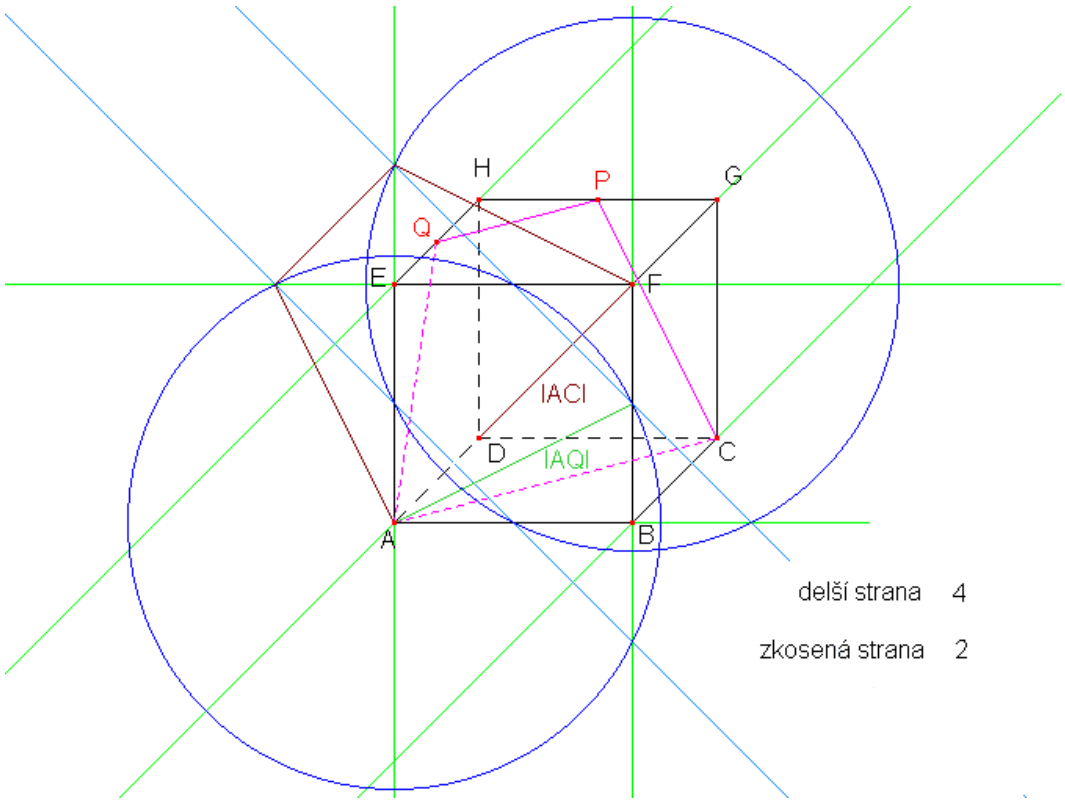
Rovina rovnoběžná s BEG



Obrázek 3.33: Krychle s rovnoběžnými rovinami BEG a ACH

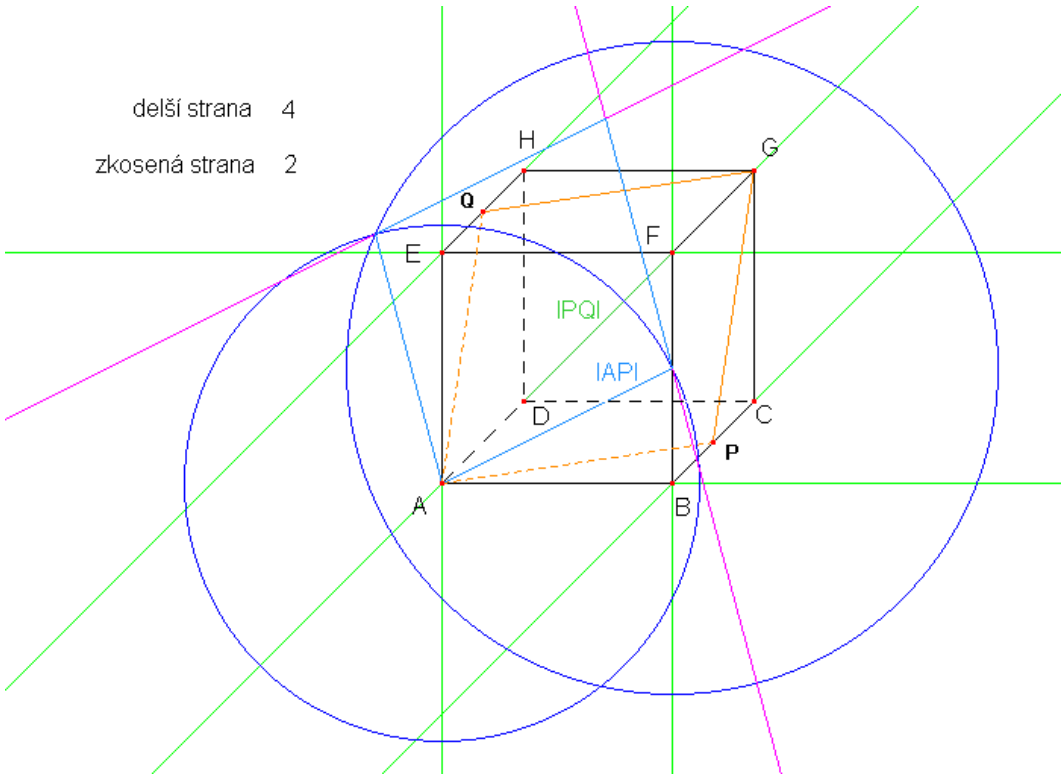
Bodem H krychle $ABCDEFGH$ veďte rovinu rovnoběžnou s rovinou BEG.

Skutečná velikost řezu



Obrázek 3.34: Skutečná velikost řezu krychle

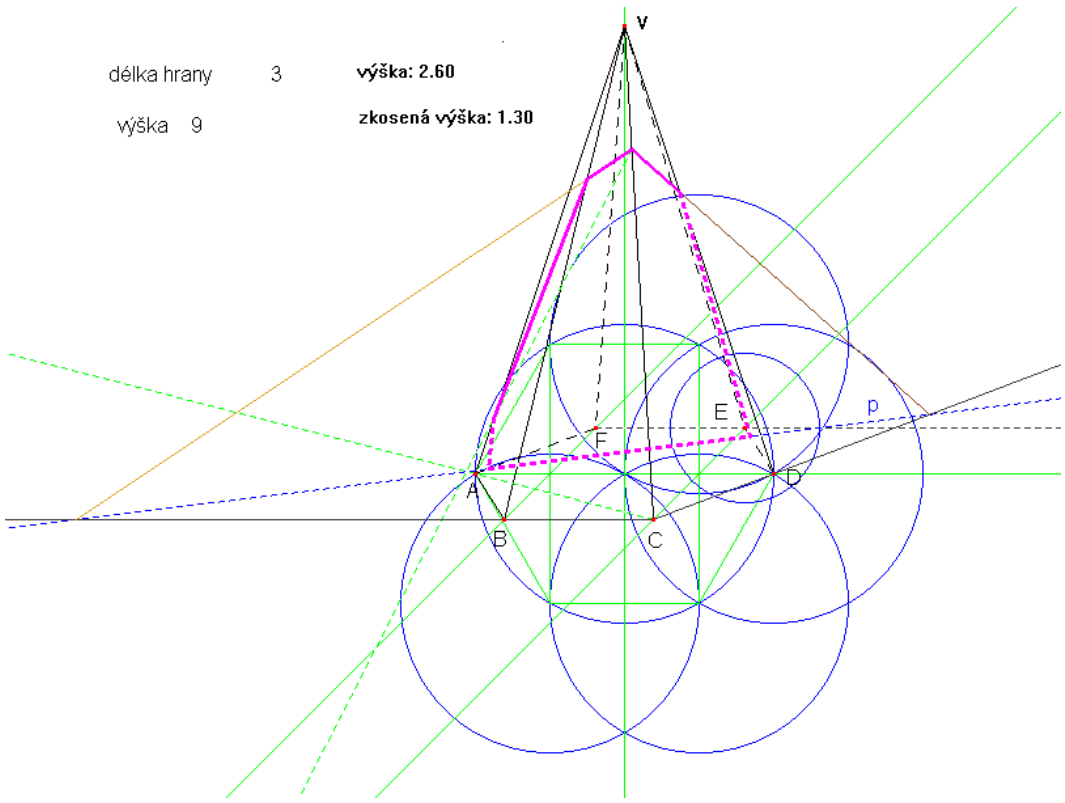
Sestrojte mnohoúhelník, který je shodný se řezem krychle $ABCDEFGH$ rovinou APQ, kde P je střed hrany BC a Q je střed hrany EH. Dále vypočtěte jeho obvod a obsah.



Obrázek 3.35: Skutečná velikost řezu krychle

Sestrojte mnohoúhelník, který je shodný se řezem krychle $ABCDEFGH$ rovinou APQ, kde P je střed hrany HG a Q je střed hrany EH. Dále vypočtěte jeho obvod a obsah.

Řez jehlanu



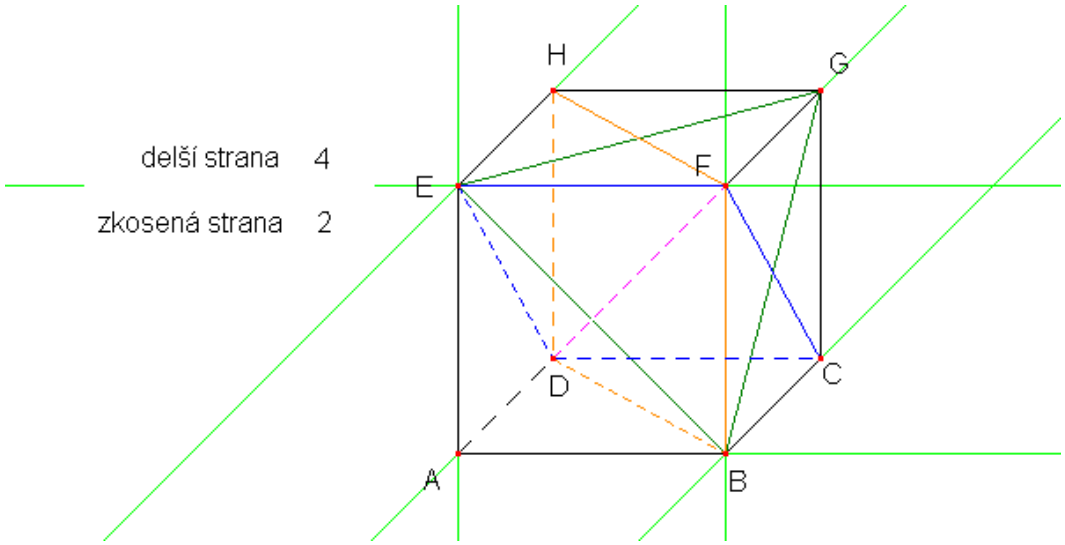
Obrázek 3.36: Řez rovinou KLM

Sestrojte řez jehlanu $ABCDEFV$ rovinou KLM.

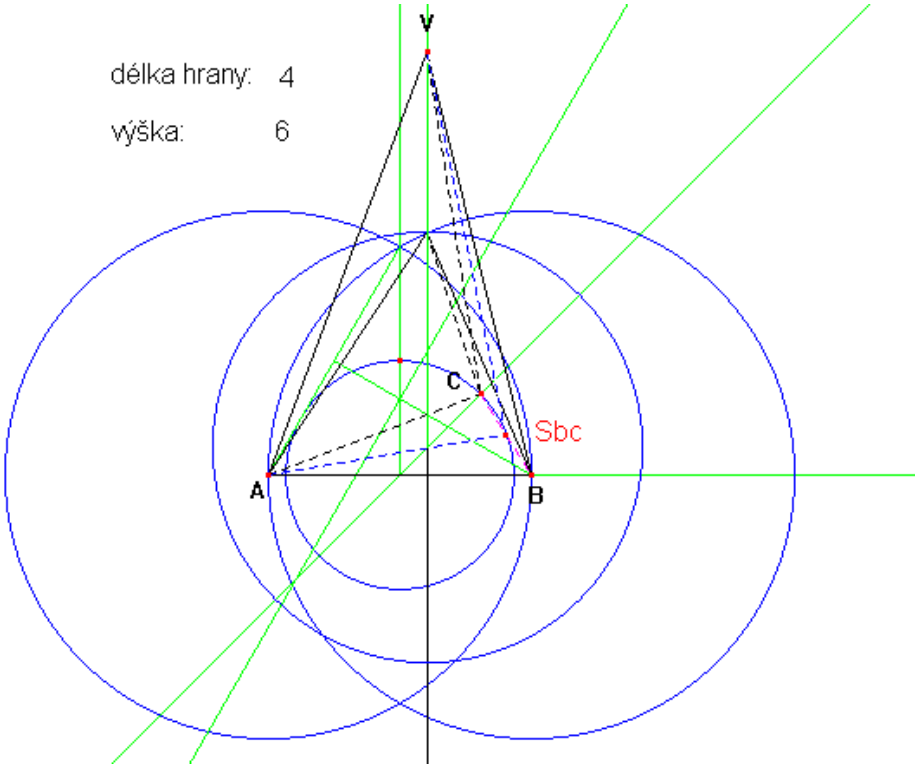
- $|AV| : |AK| = 8 : 1$, K leží na hraně AV
- $|CL| : |LV| = 3 : 1$, L leží na hraně CV
- $|FM| : |EF| = 3 : 2$, M leží na polopřímce FE

3.5 Metrické úlohy

V tomto adresáři jsou zpracovány základní typy metrických úloh týkajících se kolmosti. S využitím připravených obrázků může učitel poměrně efektivním způsobem studentům zdůvodnit jednotlivé kolmosti a diskutovat s nimi, co se stane, při změně polohy některých objektů či změně rozměrů tělesa.



Obrázek 3.37: Přímka FD kolmá na rovinu EBG



Obrázek 3.38: Pravidelný trojboký jehlan

3.6 Písemné práce

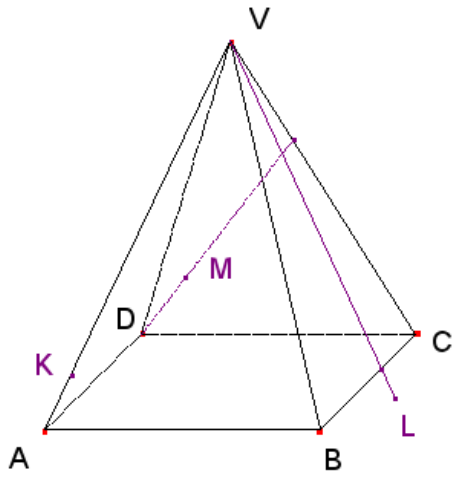
V této části je připojeno několik ukázkových návrhů na písemné práce (včetně variantních zadání). Ilustračně je připraven i rozbor jedné z nich. Takový rozbor je možné studentům po dopsání písemné práce promítnout a bez velké časové ztráty s nimi úlohy, které mají v čerstvé paměti rovnou projít.

Písemná práce – Polohové konstrukční úlohy – varianta A

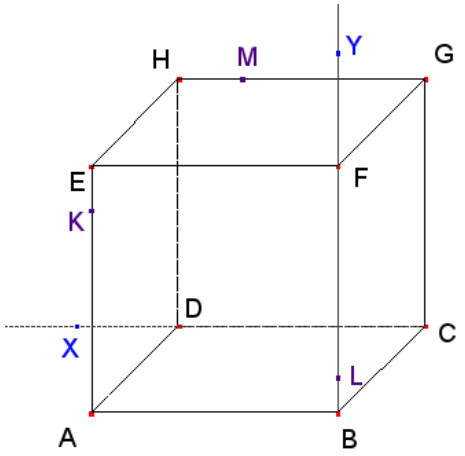
Čas na vypracování: 30 min

1. Zformulujte větu, která klasifikuje všechny možné vzájemné polohy přímky a roviny.

2. Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$ rovinou KLM. Proveďte rozbor nebo postup konstrukce a vlastní rys do uvedeného obrázku. Ostatní náležitosti konstrukční úlohy provádět nemusíte. (5 bodů)



3. Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečík přímky XY s rovinou KLM. Proveďte rozbor nebo postup konstrukce a vlastní rys do uvedeného obrázku. Ostatní náležitosti konstrukční úlohy provádět nemusíte. (5 bodů)

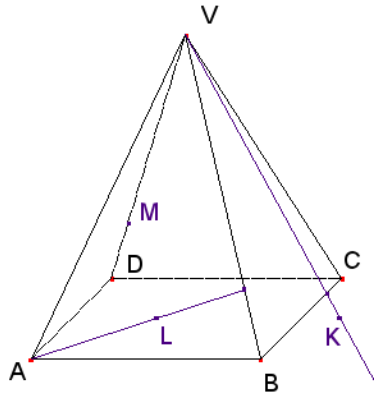


Písemná práce – Polohové konstrukční úlohy – varianta B

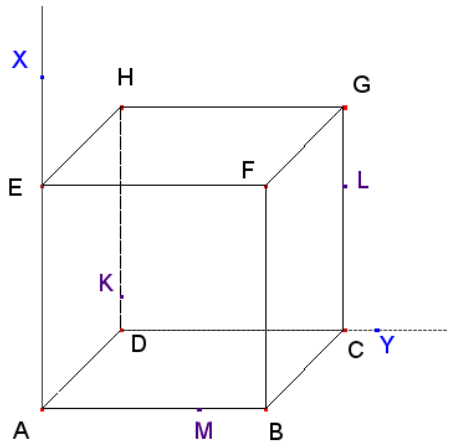
Čas na vypracování: 30 min

1. Zformulujte větu, která klasifikuje všechny možné vzájemné polohy dvou rovin v prostoru.

2. Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$ rovinou KLM. Proveďte rozbor nebo postup konstrukce a vlastní rys do uvedeného obrázku. Ostatní náležitosti konstrukční úlohy provádět nemusíte. (5 bodů)



3. Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečík přímky XY s rovinou KLM. Proveďte rozbor nebo postup konstrukce a vlastní rys do uvedeného obrázku. Ostatní náležitosti konstrukční úlohy provádět nemusíte. (5 bodů)



Písemná práce – Polohové konstrukční úlohy – varianta A (řešení)

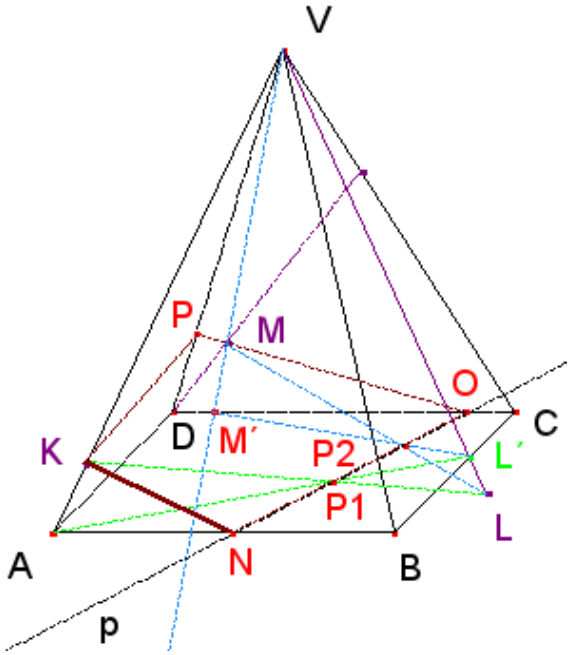
Čas na vypracování: 30 min

1. Zformulujte větu, která klasifikuje všechny možné vzájemné polohy přímky a roviny.

2. Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$ rovinou KLM. Proveďte rozbor nebo postup konstrukce a vlastní rys do uvedeného obrázku. Ostatní náležitosti konstrukční úlohy provádět nemusíte. (5 bodů)

   Rozbor:

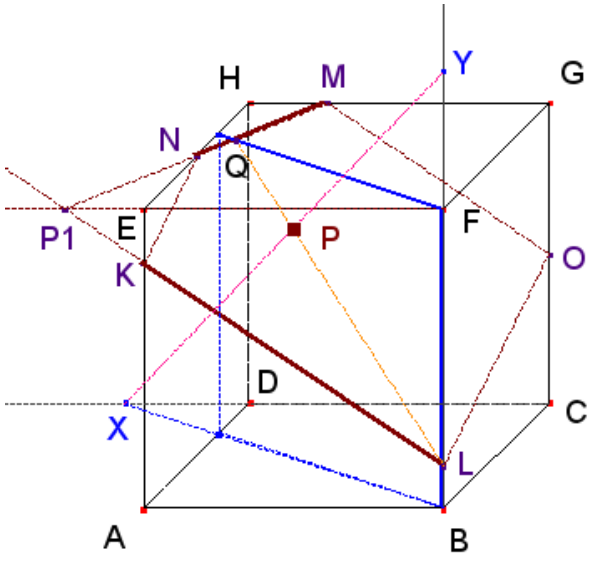
   - Na úsečce KL najdeme pomocí roviny AVL bod P_1 ležící v podstavě ABC.
   - Na úsečce ML najdeme pomocí roviny MVL bod P_2 ležící v podstavě ABC.
   - Průsečnice $p = P_1P_2$ roviny řezu KLM s rovinou podstavy ABC v podstavě určuje část řezu – úsečku NO.
   - Spojováním bodů ležících v rovině řezu a ve stejné stěně řez dokončíme.



3. Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečík přímky XY s rovinou KLM. Proveďte rozbor nebo postup konstrukce a vlastní rys do uvedeného obrázku. Ostatní náležitosti konstrukční úlohy provádět nemusíte. (5 bodů)

   Rozbor:

   - Řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM (hnědý pětiúhelník $KLOMN$)
   - Přímkou XY proložena rovina XBY (modrý řez)
   - průsečnice „hnědé“ a „modré“ roviny – přímka QL (žlutá)
   - P je průsečíkem různoběžných úseček QL a XY



Písemná práce – Polohové konstrukční úlohy – varianta B (řešení)

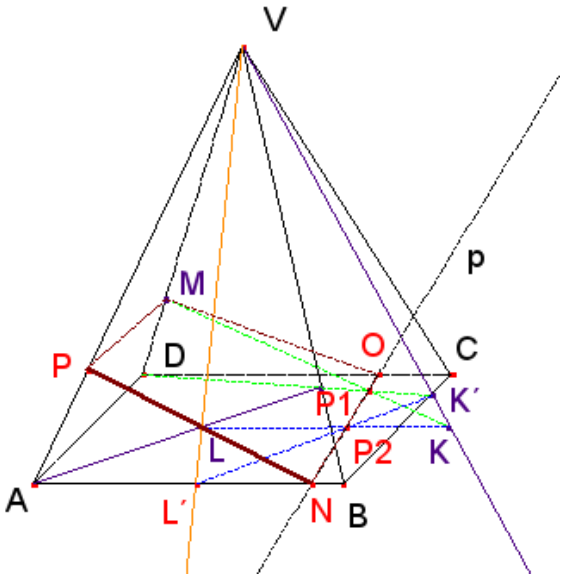
Čas na vypracování: 30 min

1. Zformulujte větu, která klasifikuje všechny možné vzájemné polohy dvou rovin v prostoru.

2. Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$ rovinou KLM. Proveďte rozbor nebo postup konstrukce a vlastní rys do uvedeného obrázku. Ostatní náležitosti konstrukční úlohy provádět nemusíte. (5 bodů)

   Rozbor:

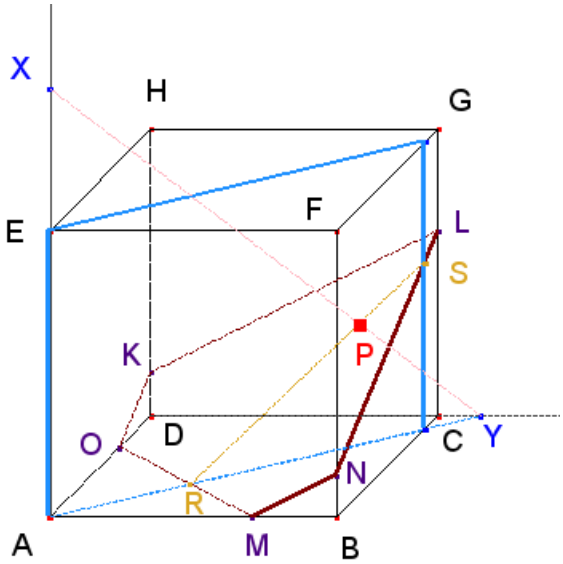
   - Na úsečce KM najdeme pomocí roviny DVK' bod P_1 ležící v podstavě ABC.
   - Na úsečce KL najdeme pomocí roviny KVL' bod P_2 ležící v podstavě ABC.
   - Průsečnice $p = P_1P_2$ roviny řezu KLM s rovinou podstavy ABC v podstavě určuje část řezu – úsečku NO.
   - Spojováním bodů ležících v rovině řezu a ve stejné stěně řez dokončíme.



3. Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$. Sestrojte průsečík přímky XY s rovinou KLM. Proveďte rozbor nebo postup konstrukce a vlastní rys do uvedeného obrázku. Ostatní náležitosti konstrukční úlohy provádět nemusíte. (5 bodů)

   Rozbor:

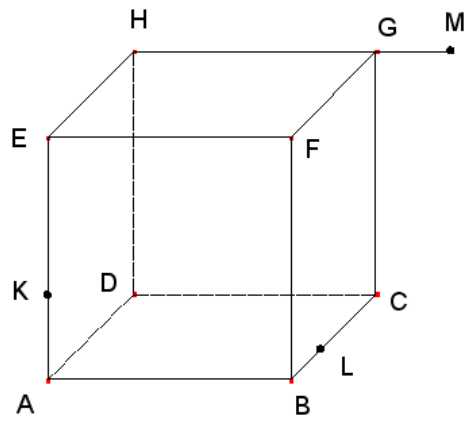
- Řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM (hnědý pětiúhelník $KOMNL$)
- Přímkou XY proložena rovina XAY (modrý řez)
- Průsečnice „hnědé“ a modré roviny – přímka RS (žlutá)
- P je průsečíkem různoběžných úseček RS a XY



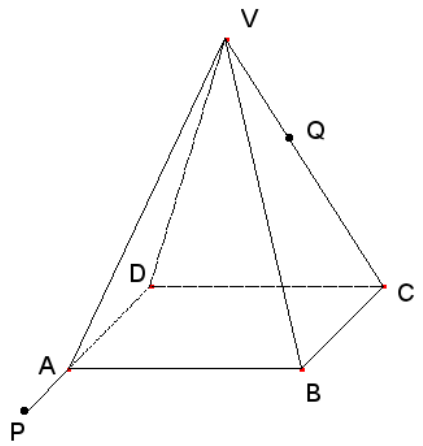
Písemná práce – konstrukční polohové úlohy – varianta A

čas na vypracování: 25 minut

1. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM (viz obrázek). Proveďte rys a napište rozbor nebo postup konstrukce.



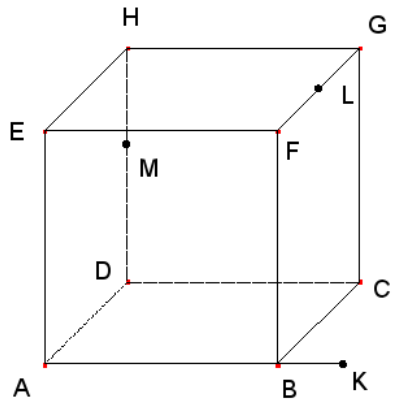
2. Určete průnik přímky PQ s jehlanem $ABCDV$ (viz obrázek). Proveďte rys a napište rozbor nebo postup konstrukce.



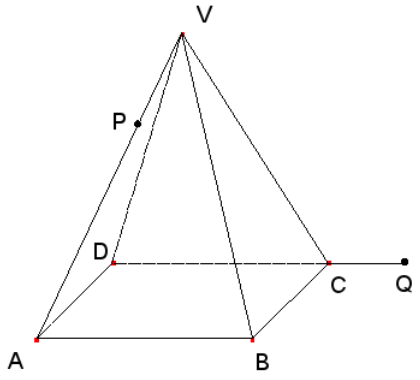
Písemná práce – konstrukční polohové úlohy – varianta B

čas na vypracování: 25 minut

1. Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM (viz obrázek). Proveďte rys a napište rozbor nebo postup konstrukce.



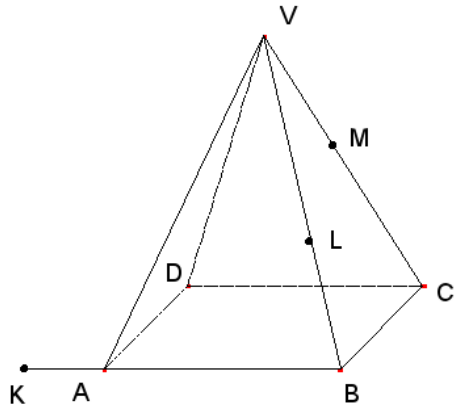
2. Určete průnik přímky PQ s jehlanem $ABCDV$ (viz obrázek). Proveďte rys a napište rozbor nebo postup konstrukce.



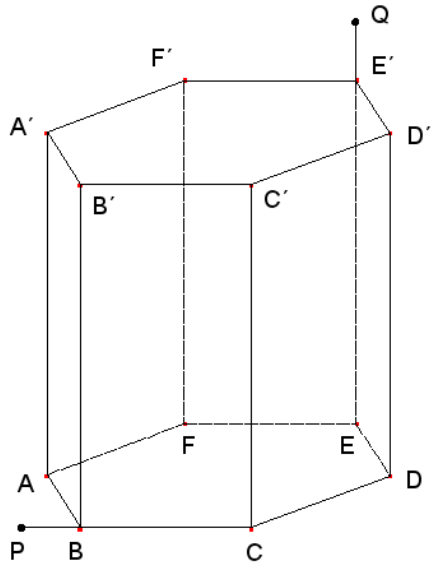
Písemná práce – konstrukční polohové úlohy – varianta C

čas na vypracování: 25 minut

1. Sestrojte řez jehlanu $ABCDV$ rovinou KLM (viz obrázek). Proveďte rys a napište rozbor nebo postup konstrukce.



2. Určete průnik přímky PQ s šestibokým hranolem $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ (viz obrázek). Proveďte rys a napište rozbor nebo postup konstrukce.



4 Gotika

V této kapitole si řekněme několik základních údajů o tomto architektonickém slohu a udělejme si přehled staveb v tomto slohu postavených.

Základní údaje

Gotický sloh vznikl přibližně kolem roku 1150 ve Francii v oblastech okolo Paříže. Samotný název se však ještě v době gotiky nepoužíval. Pojem gotika byl použit poprvé až v Itálii v období pozdní renesance. Ve Francii byl tento sloh nazýván sloh lomený.

Z Francie se šířila gotika prakticky do celé Evropy. Ještě ve 12. století se dostala do Anglie, o sto let později pak do Německa, Španělska a Itálie. K nám do českých zemí se gotika dostala koncem první poloviny 13. století. V té době u nás vládli Přemyslovci.

Významné evropské gotické stavby

Francie

Podívejme se nejprve do Francie. Mezi nejvýznamnější francouzké stavby patří katedrála Notre-Dame v Paříži či katedrála v Remeši (obr. 4.1 a 4.2).

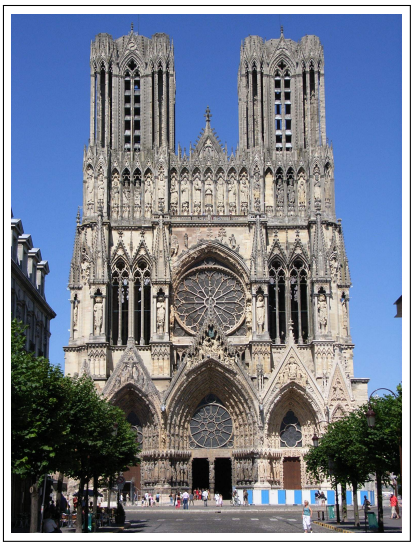
Anglie

V Anglii mezi nejvýznamnější stavby patří katedrála v Salizbury a také Westminsterské opatství v Londýně (obr. 4.3 a 4.4).

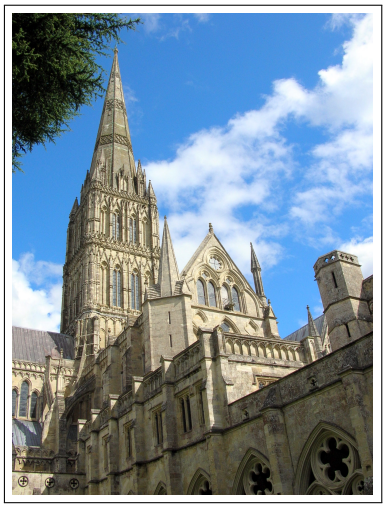
Itálie

Z italské architektury zmiňmě dvě stavby: Milánský dóm a katedrálu v Sieně (obr. 4.5 a 4.6).

Obrázek 4.1: Notre-Dame v Paříži



Obrázek 4.2: Katedrála v Remeši



Obrázek 4.3: Katedrála v Salizbury

Obrázek 4.4: Westminsterské opatství v Londýně

Obrázek 4.5: Milánský dóm

Obrázek 4.6: Katedrála v Sieně

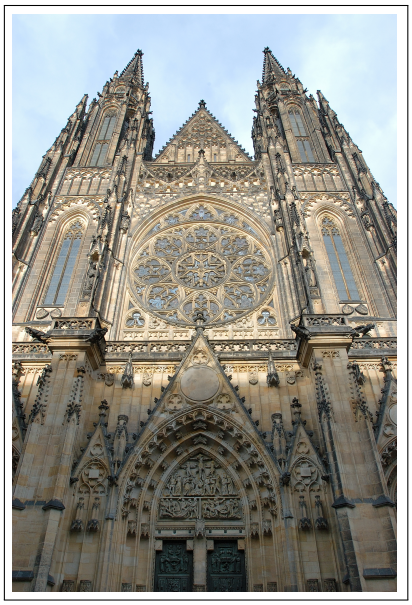
Gotika u nás

U nás najdeme velké množství gotických staveb. Ukažme si ty nejvýznamnější.

1. Katedrála svatého Víta v Praze (obr. 4.7).
2. Chrám svaté Barbory v Kutné Hoře (obr. 4.8).
3. Bazilika Nanebevzetí Panny Marie v Brně (obr. 4.9).
4. Porta Coeli v Předklášteří u Tišnova (obr. 4.10)

Znaky gotické architektury

Mezi charakteristické znaky gotické architektury patří oblouky, klenby a kružby. Jednotlivé znaky si rozebereme z geometrického hlediska v dalších kapitolách. Mezi další důležité prvky patří fiály či chrliče. Charakteristická pro gotiku je vertikálnost a štíhlost.



Obrázek 4.7: Katedrála svatého Víta v Praze

Obrázek 4.8: Chrám svaté Barbory v Kutné Hoře

Obrázek 4.9: Bazilika Nanebevzetí Panny Marie v Brně

Obrázek 4.10: Porta Coeli v Předklášteří u Tišnova

4.1 Oblouky

Tento konstrukční prvek nacházíme u zejména kleneb. Další využití nacházely tyto oblouky u oken, portálů či opěrných systémů.

Pojďme se podívat na jednotlivé typy oblouků z geometrického hlediska.

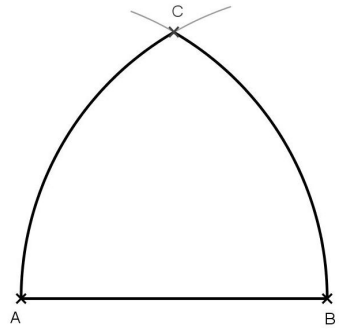
Lomený oblouk

Rozlišujeme tři typy lomených oblouků: základní, zvýšený a snížený.

Základní lomený oblouk

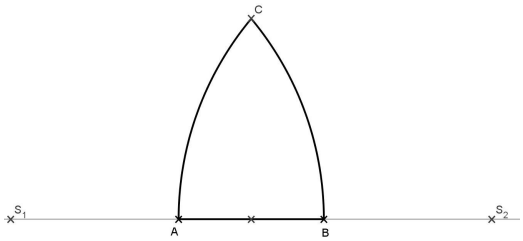
Postup konstrukce

1. $AB;\ |AB| = a$
2. $k; k(A; r = a)$
3. $l; l(b; r = a)$
4. $C; C \in k \cap l$



Na obrázku můžete vidět ukázku lomeného oblouku z katedrály ve Strasbourgu.

Lomený oblouk zvýšený



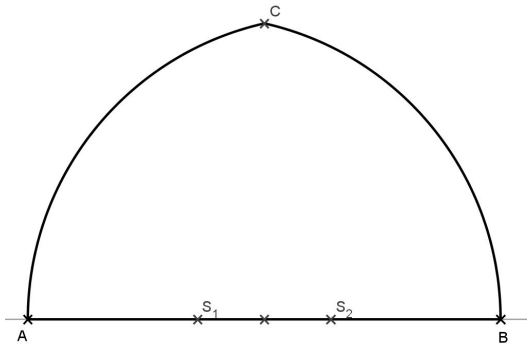
Postup konstrukce

1. $AB;\ |AB| = a$
2. $S_1, S_2;\ S_1 \in \leftarrow AB,\ S_2 \in \leftarrow BA$
3. $k;\ k(S_1; r = |S_1B|)$
4. $l;\ l(S_2; r = |AS_2|)$
5. $C;\ C \in k \cap l$

Lomený oblouk snížený

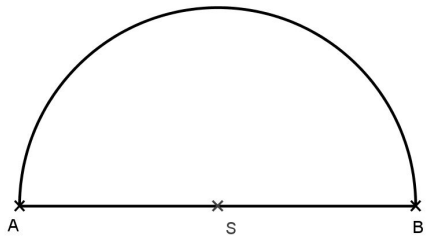
Postup konstrukce

1. $AB;\ |AB| = a$
2. $S;\ S = A \doteq B$
3. $S_1, S_2;\ S_1 \in \leftarrow AS,\ S_2 \in \leftarrow SB$
4. $k;\ k(S_1; r = |S_1B|)$
5. $l;\ l(S_2; r = |AS_2|)$
6. $C;\ C \in k \cap l$



Půlkruhový oblouk

Dalším důležitým obloukem je půlkruhový. Jeho konstrukce není vůbec složitá. Jedná se o jednoduchý půlkruh.



Postup konstrukce

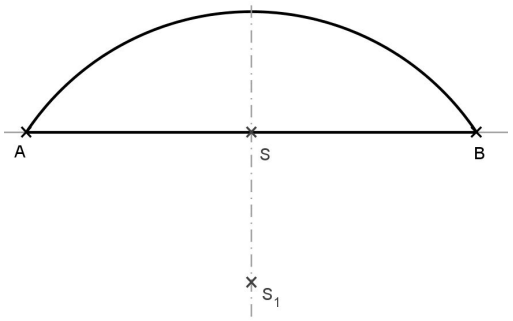
1. $AB;\ |AB| = a$
2. $S;\ S = A \doteq B$
3. $k;\ k(S; r = |AS|)$

Segmentový oblouk

Segmentový oblouk taktéž není vůbec složitý. Jedná se pouze o kruhovou úseč.

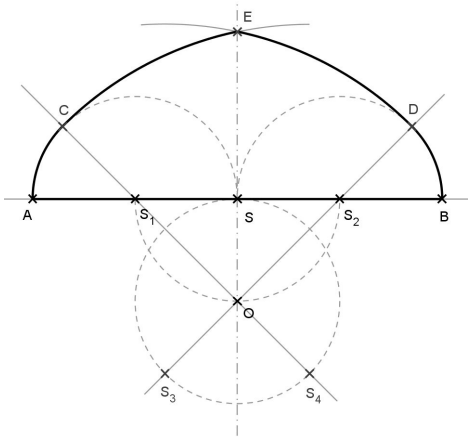
Postup konstrukce

1. $AB;\ |AB| = a$
2. $o;\ o = \{X; |AX| = |XB|\}$
3. $S_1;\ S_1 \in o$
4. $k;\ k(S; r = |AS|)$



Tudorský oblouk

Už mírně složitějším je Tudorský oblouk. Ten se využíval převážně v období pozdní gotiky.



Postup konstrukce

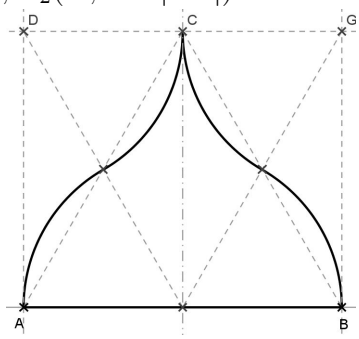
1. $AB;\ |AB| = a$
2. $S;\ S = A \doteq B$
3. $S_1;\ S_1 = A \doteq S$, $S_2;\ S_2 = S \doteq B$
4. $o;\ o = \{X; |AX| = |XB|\}$
5. $O;\ O \in o, |OS| = |SS_1|$
6. $k;\ k(O; r = |OS|)$
7. $S_3;\ S_3 \in\leftrightarrow OS_2 \cap k$
8. $S_4;\ S_4 \in\leftrightarrow OS_1 \cap k$
9. $k_1;\ k_1(S_1; r = |AS_1|)$
10. $k_2;\ k_2(S_2; r = |S_2B|)$
11. $C;\ C \in k_1 \cap OS_1$.
12. $D;\ D \in k_2 \cap OS_2$.
13. $k_3;\ k_3(S_3; r = |S_3D|)$
14. $k_4;\ k_4(S_4; r = |S_4C|)$
15. $E;\ E \in k_3 \cap k_4$

Oslí hřbet

Tento v gotice oblíbený oblouk narozdíl od ostatních plnil pouze dekorativní funkci, nikoliv nosnou.

Postup konstrukce

1. $AB;\ |AB| = a$
2. $C; |AC| = |BC| = |AB|$
3. $S;\ S = A \doteq B$
4. $p; p \parallel\leftrightarrow AB; C \in p$
5. $q; q \perp\leftrightarrow AB; A \in q$
6. $r; r \perp\leftrightarrow AB; B \in r$
7. $D;\ D \in p \cap q$
8. $G;\ G \in p \cap r$
9. $k;\ k(S; r = |AS|)$
10. $k_1;\ k_1(D; r = |AS|)$
11. $k_2;\ k_2(G; r = |AS|)$



Úkoly pro studenty

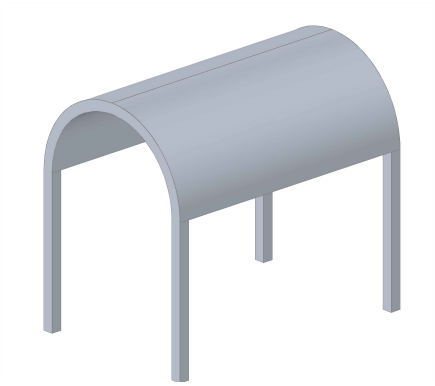
Příklad. Pokuste se najít ve svém okolí příklady uvedených oblouků.

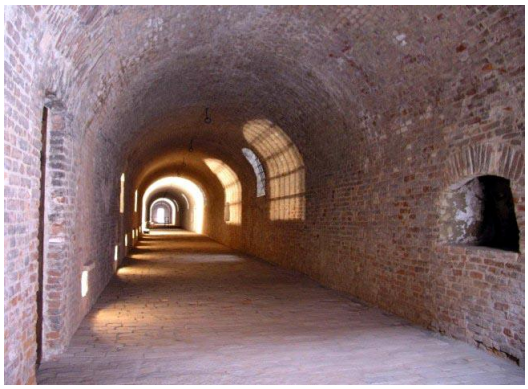
4.2 Klenby

Klenbou rozumíme nosnou konstrukci, která uzavírá část prostoru. První doložené klenby pochází již z roku okolo 3300 před naším letopočtem, nejstarší dochované pak z 12. století před naším letopočtem. My se podíváme na klenby opět z geometrického hlediska. Prakticky se nejedná o nic jiného, než o plochy či průnik více ploch.

Klenba valená

Valená klenba je nejjednodušší klenbou a jedná se o polovinu válcové plochy.





Na obrázku vidíme ukázku valené klenby z hradu Špilberk.

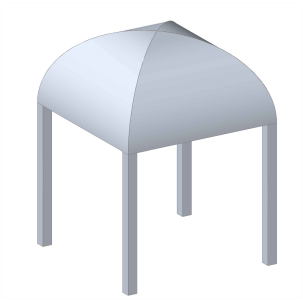
Klenba křížová

Křížová klenba vznikne průnikem dvou válcových ploch, kde se zachovají vnější části válcových ploch.

Na obrázku vidíme ukázku křížové klenby v katedrále v Remeši.

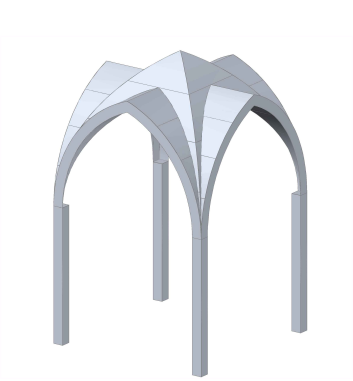
Klenba klášterní

Kláštěrní klenba vznikne podobně jako klenba křížová průnikem dvou válcových ploch, kde se ale tentokrát zachovají vnitřní části válcových ploch.



Klenba hvězdová

Hvězdová klenba je již o něco složitejší. Vznikne opět jako průnik válcových ploch, které však mají lomené oblouky jako své podstavy.



Na obrázku vidíme ukázku hvězdové klenby u hradu Tochuraz u Českého Brodu.

Úkoly pro studenty

1. Vyhledejte ve svém okolí stavby, ve kterých se vyskytují uvedené klenby.

2. Znáte i další druhy kleneb? Pokuste se určit, jakým způsobem jsou konstruovány.

4.3 Kružby

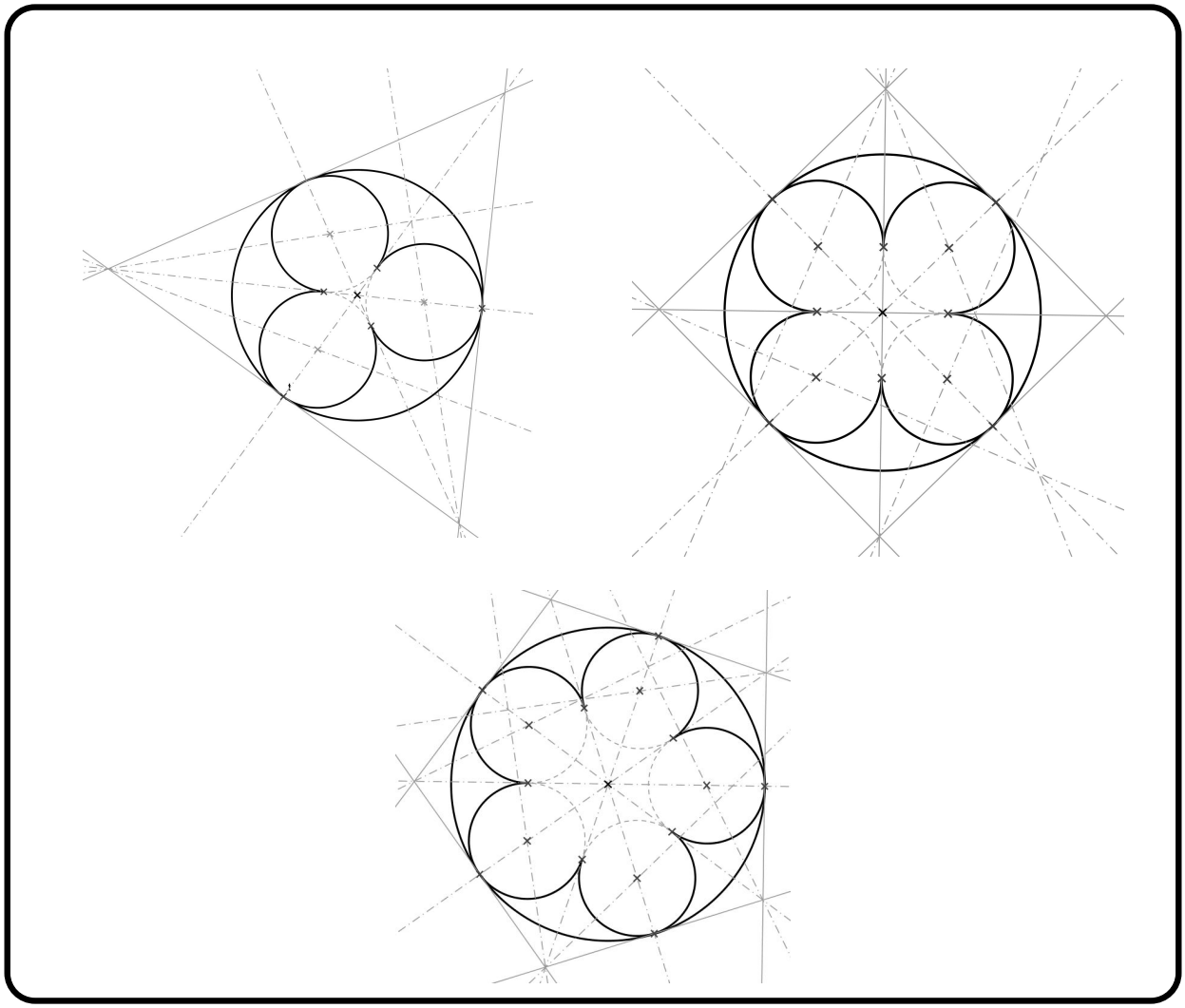
Posledním konstrukčním prvkem, který si ukážeme, jsou kružby. Ty mají nejen zdobnou funkci, ale řeší i čistě technický problém. Pro gotickou architekturu jsou typická velká okna, ovšem bylo problémem vyrobit tak velká skla. To vyřešily právě kružby.

Pojďme se nyní podívat na konstrukce kružeb. Nejprve si ukážeme konstrukce některých základních prvků, které se v kružbách vyskytují.

Prvními prvky budou trojlístek, čtyřlístek a pětilístek vepsaný do kruhu. Tyto prvky jdou konstruovat dvěma způsoby. V prvním se využije stejnolehlosti, ve druhém vlastnosti kružnice vepsané trojúhelníku. Touto cestou se vydáme i my. Protože je uvedená konstrukce téměř stejná pro všechny tři prvky, uveďme si ji hned na začátku další sekce.

Trojlístek, čtyřlístek a pětilístek v kruhu

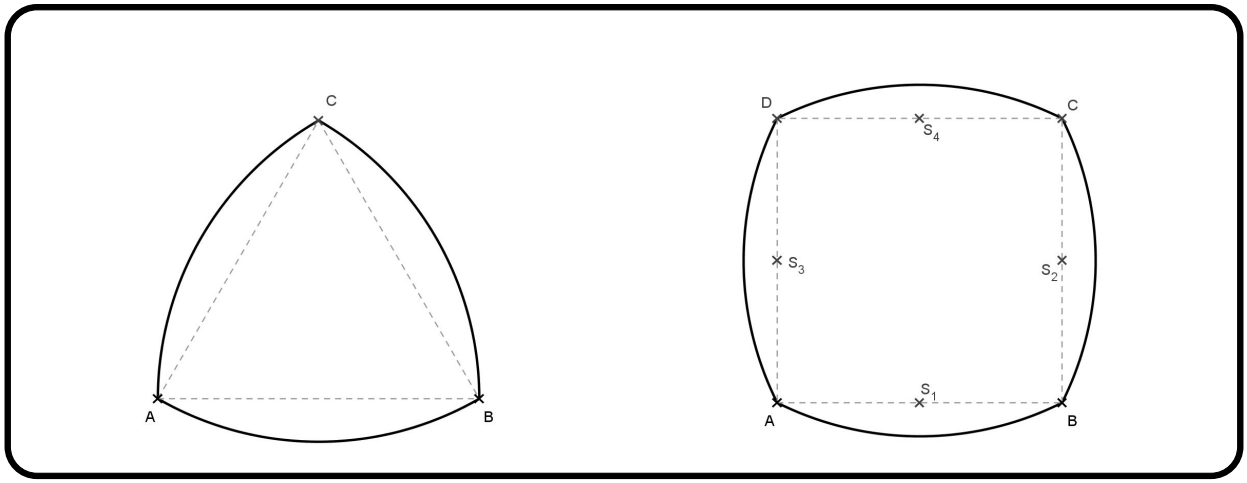
Nejprve rozdělíme kruh na tři (čtyři resp. pět) stejné výseče. Sestrojme rovnoramenné trojúhelníky, jejiž ramena budou ležet na polopřímkách vymezujících jednotlivé výseče a jejiž přepony se budou dotýkat základní kružnice. Nyní již stačí do těchto trojúhelníků vepsat kružnice.



Sférický trojúhelník a sférický čtyřúhelník

Sférický trojúhelník a sférický čtyřúhelník jsou častými prvky. Konstrukce sférického trojúhelníku je snadná. Stačí sestrojit oblouky nad stranami rovnostranného trojúhelníku se středy v protějších vrcholech.

Konstrukce sférického čtyřúhelníku je podobná. Stačí sestrojit oblouky nad stranami čtverce se středy ve středech protějších stran.

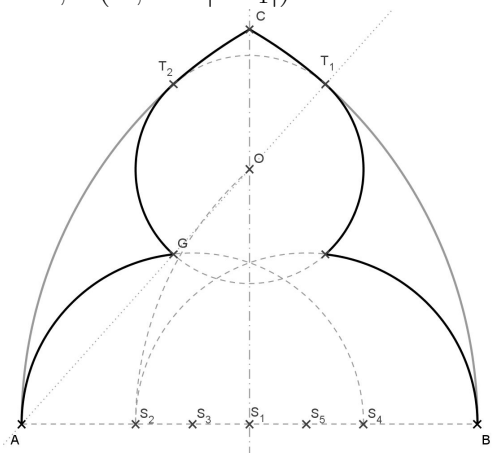


Mniška

Dalším zajímavým prvkem je mniška. Konstrukce je poněkud složitější. Výchozí konstrukcí je lomený oblouk. Vycházejme tedy z něho.

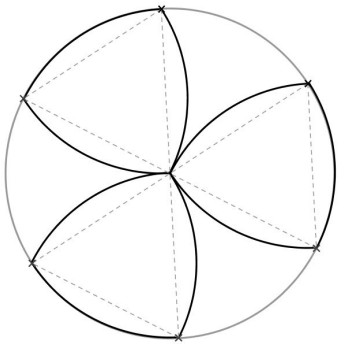
Postup konstrukce

1. $S_1;\ S_1 = A \doteq B$
2. $S_2;\ S_2 = A \doteq S_1$
3. $S_3;\ S_3 = S_2 \doteq S_1$
4. $S_4;\ S_4 = S_1 \doteq B$
5. $S_5;\ S_5 = S_1 \doteq S_4$
6. $o;\ o = \{X \mid |AX| = |BX|\}$
7. $O;\ O \in o; |OS_1| = |BS_2|$
8. $k_1;\ k_1(S_3; r = |AS_3|)$
9. $k_2;\ k_2(S_5; r = |S_5B|)$
10. $\leftrightarrow p;\ p = \leftrightarrow AO$
11. $T_1;\ T_1 \in p \cap$ lomený oblouk
12. $k;\ k(O; r = |OT_1|)$



Tři sférické trojúhelníky vepsané do kruhu

Poslední konstrukcí, na kterou se podíváme, jsou tři sférické trojúhelníky vepsané do kruhu. Rozdělme kruh na šest stejných výsečí. Každá z nich reprezentuje rovnostranný trojúhelník. Z každého druhého potom uděláme sférický trojúhelník.



Úkoly pro studenty

1. Dokázali byste navrhnout ještě další konstrukci trojlístku, čtyřlístku a pětilístku?
2. Sestrojte šestilístek vepsaný do kruhu.
3. Vyhledejte ve svém okolí příklad nějaké kružby. Podívejte se na základní prvky, ze kterých je složena. Dokážete ji sestrojit?