Obsah

Úvod

Tento text vznikl v rámci projektu Modulární systém dalšího vzdělávání pedagogických pracovníků JmK v přírodních vědách a informatice. Je určen učitelům matematiky na středních školách a tématicky je zaměřen na výuku geometrie, tj. planimetrii a stereometrii.

Čtenář zde najde stěžejní část planimetrie, tedy geometrická zobrazení, které dodávají školské geometrii půvab. Pro osvojení si tohoto pohledu na geometrii je potřeba rozumět drobným rozdílům mezi jednotlivými příklady, které jsou postupně gradované od nejjednodušších až k opravdu milým.

Podobně je ve stereometrii věnována pozornost otázce řezů - látce, která je základní, leč často vyvolává strach. Přitom při vhodném uchopení této látky je možné celou situaci do jisté míry algoritmizovat a velmi zjednodušit, tedy zpřístupnit ji i méně nadaným studentům.

Důležitou součástí textu je pasáž o rozvíjení prostorové představivosti. Konec konců o tu jde na střední škole především. Připustíme-li totiž diskusi o tom, co si studenti odnesou do života, pak je to zřejmě právě ona prostorová představivost, kterou jedni uplatní při běžném řízení automobilu a jiní při studiu stavebnictví, strojírenství či architektury. Ke stejnému účelu mohou posloužit i stereometrické hry.

Pro přímé použití ve výuce jsou nachystány tzv. pracovní listy, tématicky zaměřené na stereometrii, prostorovou představivost a práci s volným rovnoběžným promítáním.

Nadstavbou nad běžný rámec učiva jsou pasáže o sítích těles a kruhové inverzi. Jde o stručný náznak, že geometrie může nabídnout víc než se vejde do běžných hodin matematiky a je na učiteli, aby dokázal nabídnout šikovným studentům také něco navíc.

1 Stereometrie – Řezy

1.1 Věta o vzájemné poloze tří rovin

Jsou dány tři roviny v prostoru $\mathbb{E}_3$. Nabývají právě jednu z následujících vzájemných poloh:

a) Všechny tři roviny splývají.

b) Dvě roviny splývají, třetí je s nimi rovnoběžná.

c) Dvě roviny splývají, třetí je s nimi různoběžná.

d) Všechny tři roviny jsou rovnoběžné různé.

e) Dvě roviny jsou rovnoběžné různé, třetí je s nimi různoběžná.

f) Všechny tři roviny jsou po dvou různoběžné, průsečnice splývají.

g) Všechny tři roviny jsou po dvou různoběžné, průsečnice jsou rovnoběžné různé přímky.

h) Všechny tři roviny jsou po dvou různoběžné, průsečnice nejsou rovnoběžné přímky.

1.2 Důležité vlastnosti

Pro roviny uvedené v předchozí větě platí:

- v situaci e) označme ϱ a σ rovnoběžné roviny a π rovinu s nimi různoběžnou. Pak přímky $p = \varrho \cap \pi$ a $q = \sigma \cap \pi$ – průsečnice různoběžných rovin – jsou rovnoběžné přímky.
- v situaci h) označme roviny ϱ, σ a π. Pak přímky $p = \varrho \cap \pi$, $q = \sigma \cap \pi$ a $r = \varrho \cap \sigma$ – průsečnice těchto rovin – jsou po dvou různoběžné přímky a procházejí společným bodem.

Situace a), b) a c), kdy některé roviny splývají, jsou mezní, uvedeny jsou pro úplnost.

Pro konstrukce řezů využijeme hlavně situace e) a h), částečně g), kterou je pro naše potřeby možné považovat za zvláštní případ situace h) – společný bod všech tří průsečnic „je v nekonečnu“.

1.3 Hledání průsečíku přímky s rovinou

Jsou dány body K a L a rovina ϱ, ve které tyto body neleží. Průsečík přímky KL s rovinou ϱ je bod X, který je průsečíkem přímky KL a přímky $K'L'$, která je průmětem přímky KL do roviny ϱ.

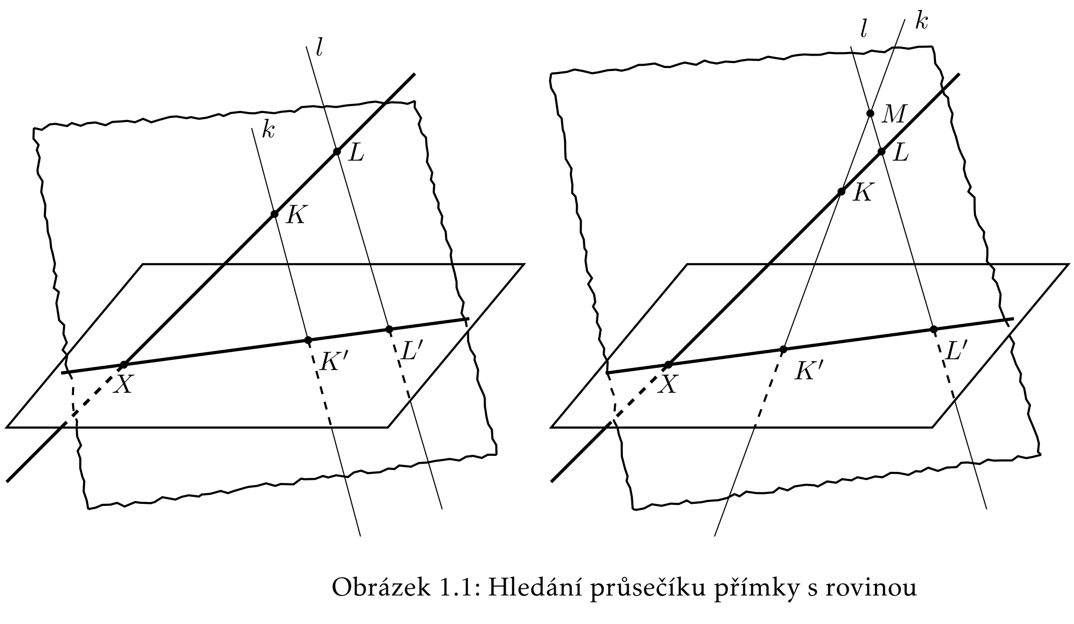
Tuto větu budeme používat takto:

Potřebujeme-li určit průsečík X přímky KL s rovinou ϱ najdeme libovolnou rovinu σ, která obsahuje přímku KL (tedy body K a L) a najdeme její průsečnici q s rovinou ϱ. Průsečík přímky q s přímkou KL je hledaný bod X. Možných rovin σ je nekonečně mnoho.

Vzhledem k tomu, že máme přímku KL dánu jejími dvěma body K a L, můžeme postupovat následujícím způsobem:

Najdeme přímky k a l, které leží v jedné rovině (to je rovina σ) a které procházejí po řadě body K a L, jejichž průsečíky s rovinou ϱ umíme určit. Tyto průsečíky označme K' a L', přímka $K'L'$ je hledaná průsečnice q.

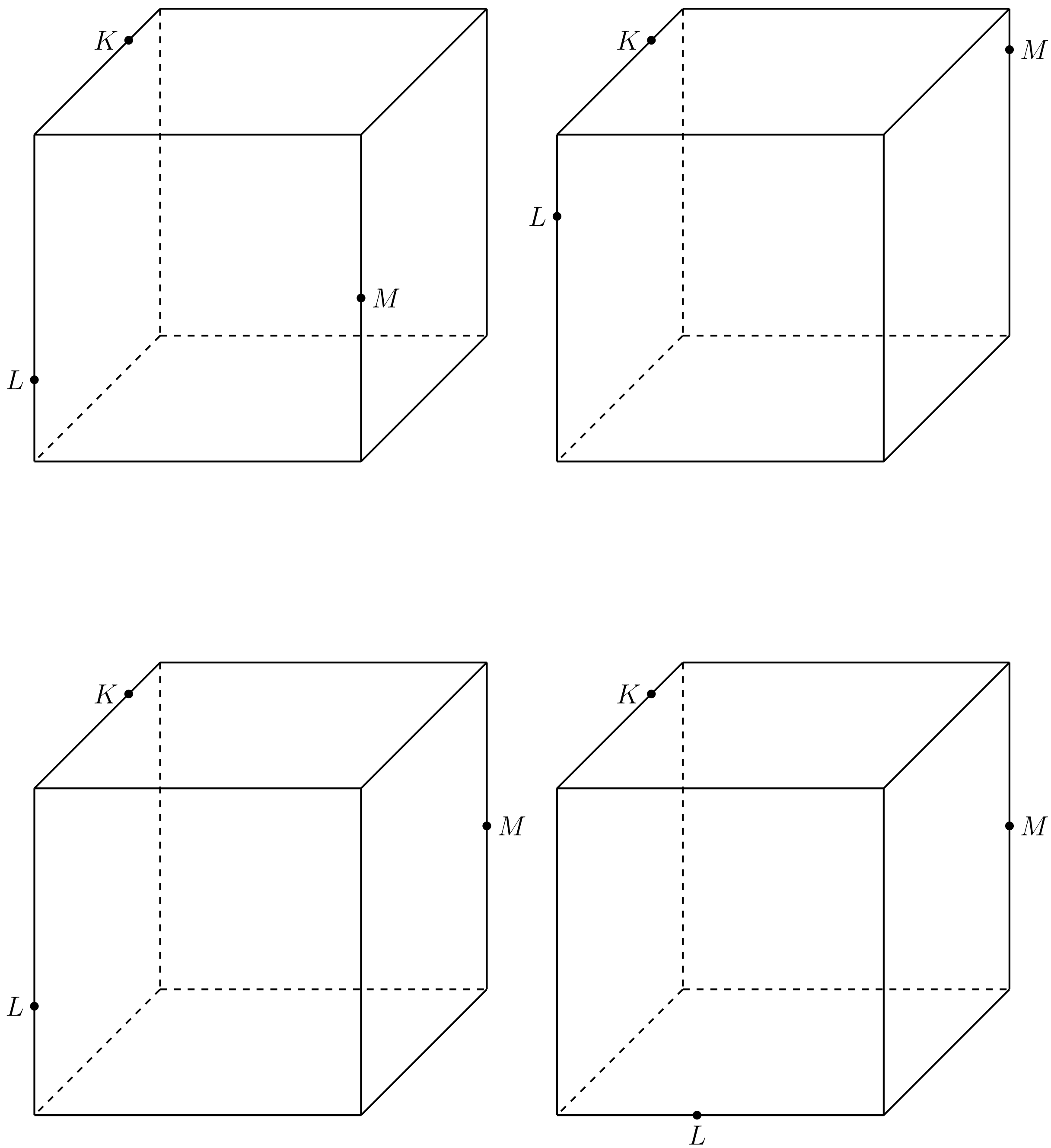
Přímky k a l leží v jedné rovině právě tehdy, když jsou rovnoběžné, nebo různoběžné (nesmí být mimoběžné). Rovnoběžnost zabezpečíme snadno – rovnoběžné přímky jsou i ve volném rovnoběžném promítání rovnoběžné, různoběžnost zabezpečíme tak, že přímky k a l budou procházet jedním společným bodem.



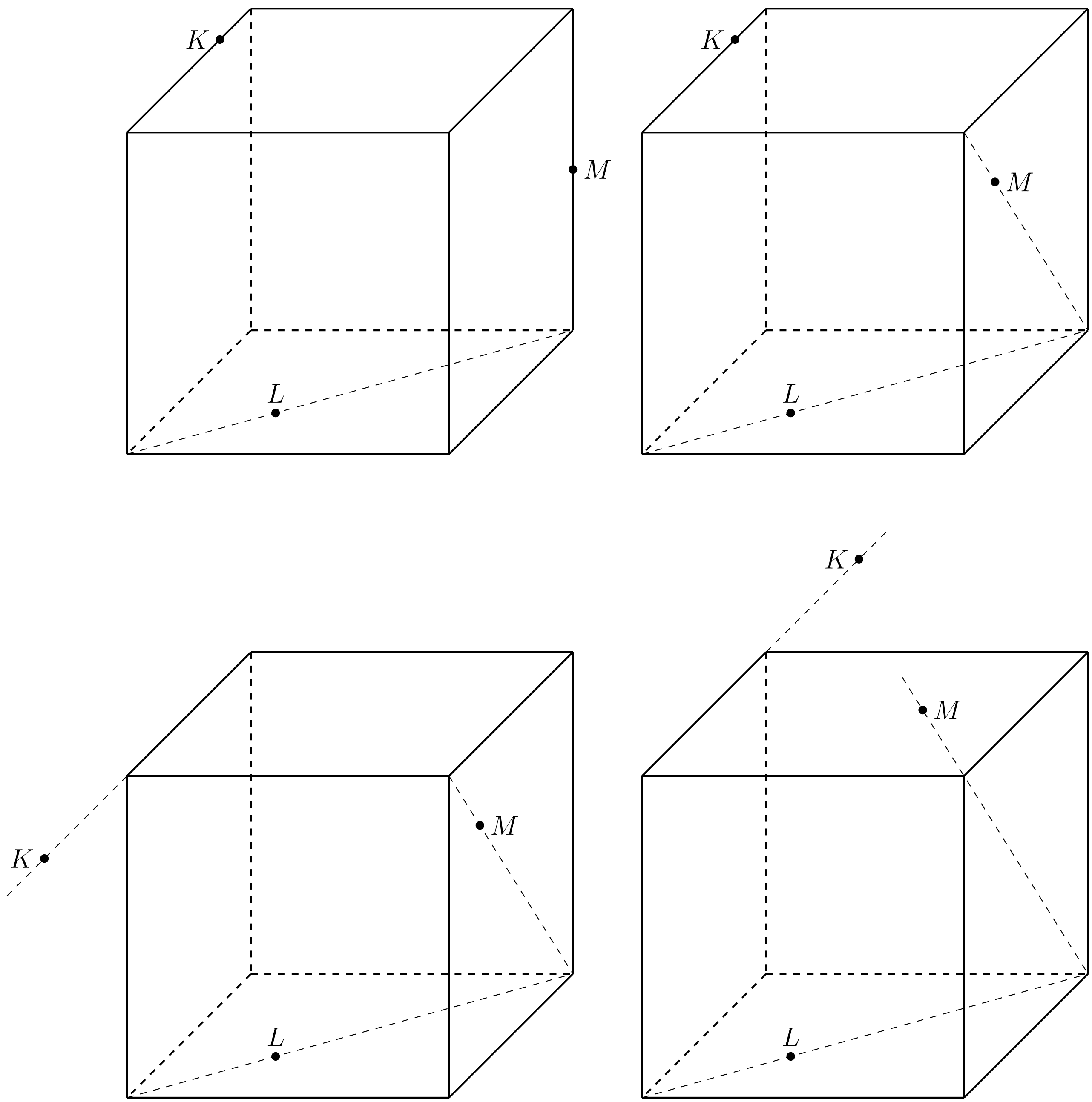
Obrázek 1.1: Hledání průsečíku přímky s rovinou

1.4 Úlohy na konstrukce řezů

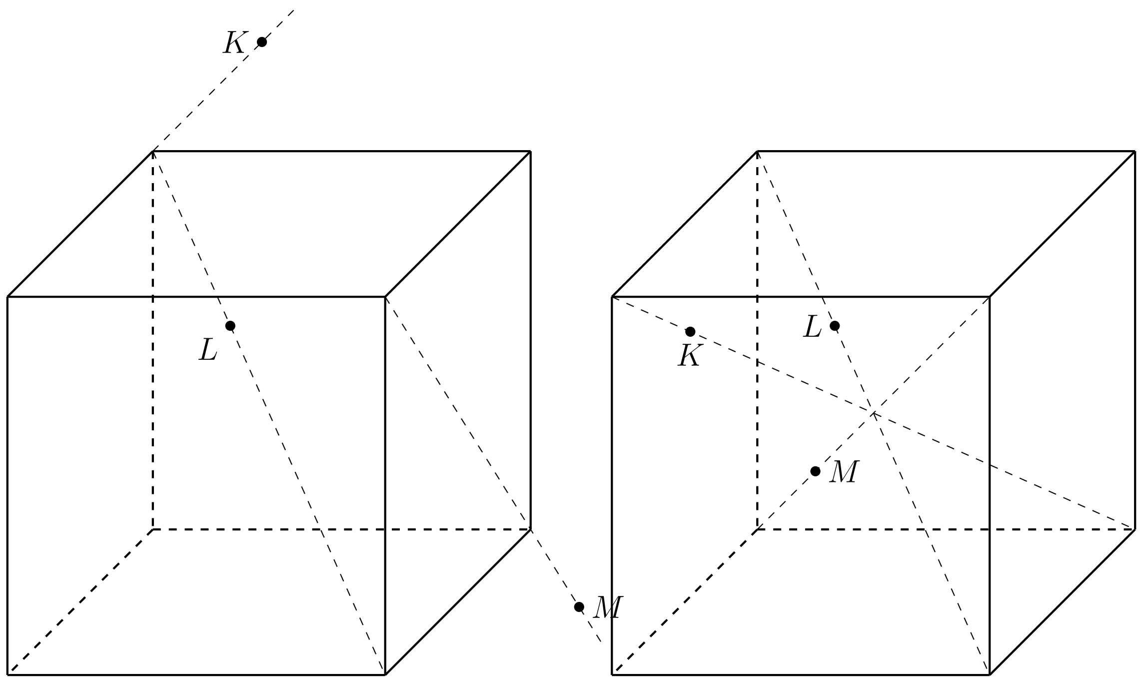
Příklad 1.1. Sestrojte řez krychle rovinou KLM.



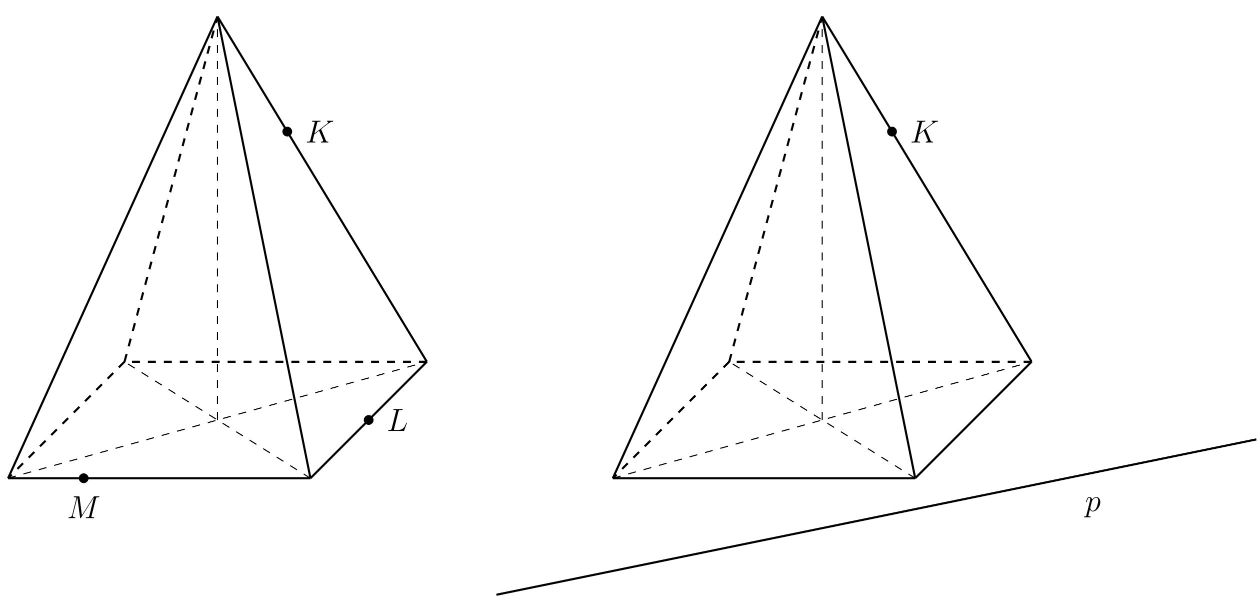
Příklad 1.2. Sestrojte řez krychle rovinou KLM.



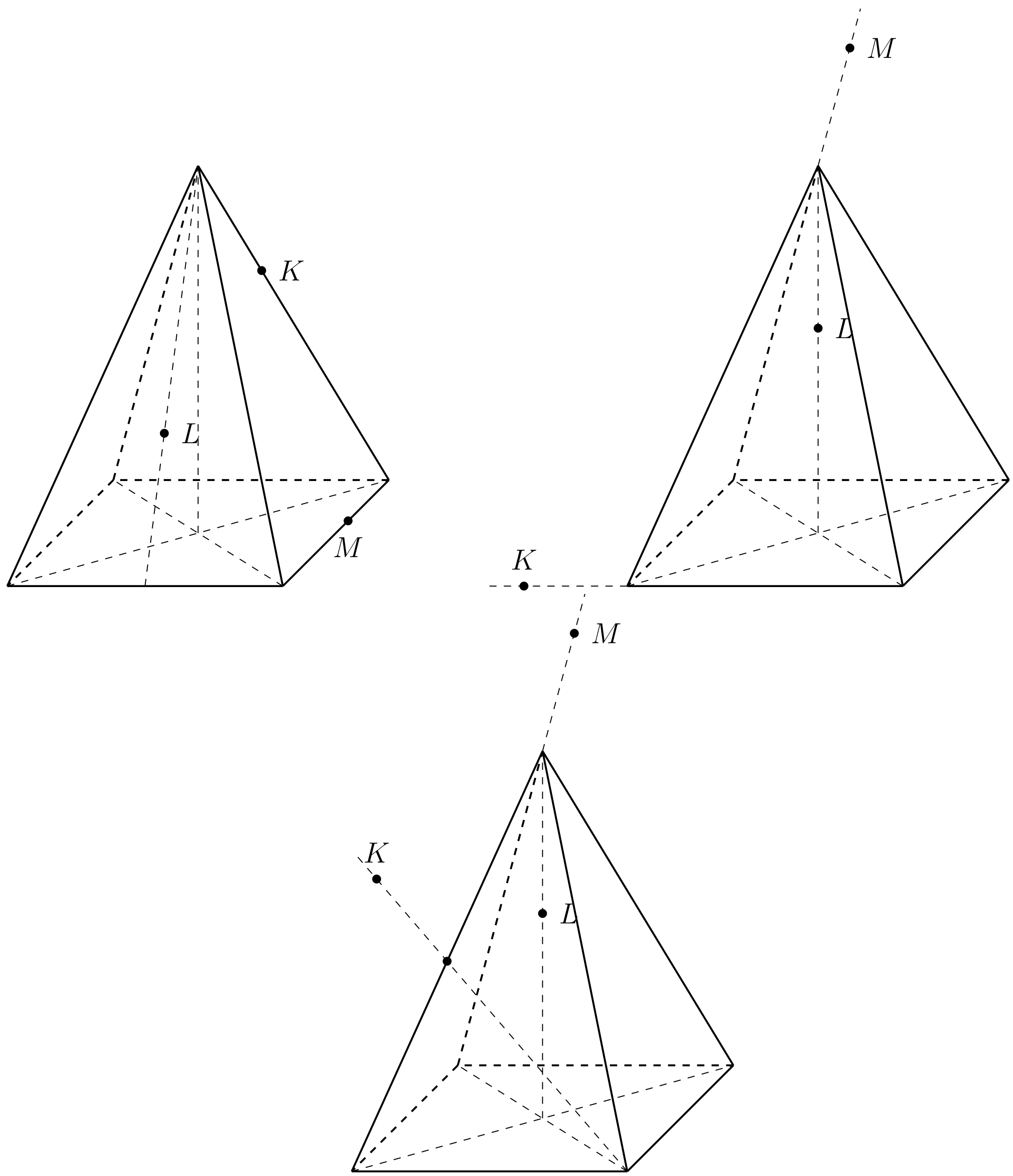
Příklad 1.3. Sestrojte řez krychle rovinou KLM.



Příklad 1.4. Sestrojte řez jehlanu rovinou KLM nebo rovinou danou bodem K a přímkou p.



Příklad 1.5. Sestrojte řez jehlanu rovinou KLM.

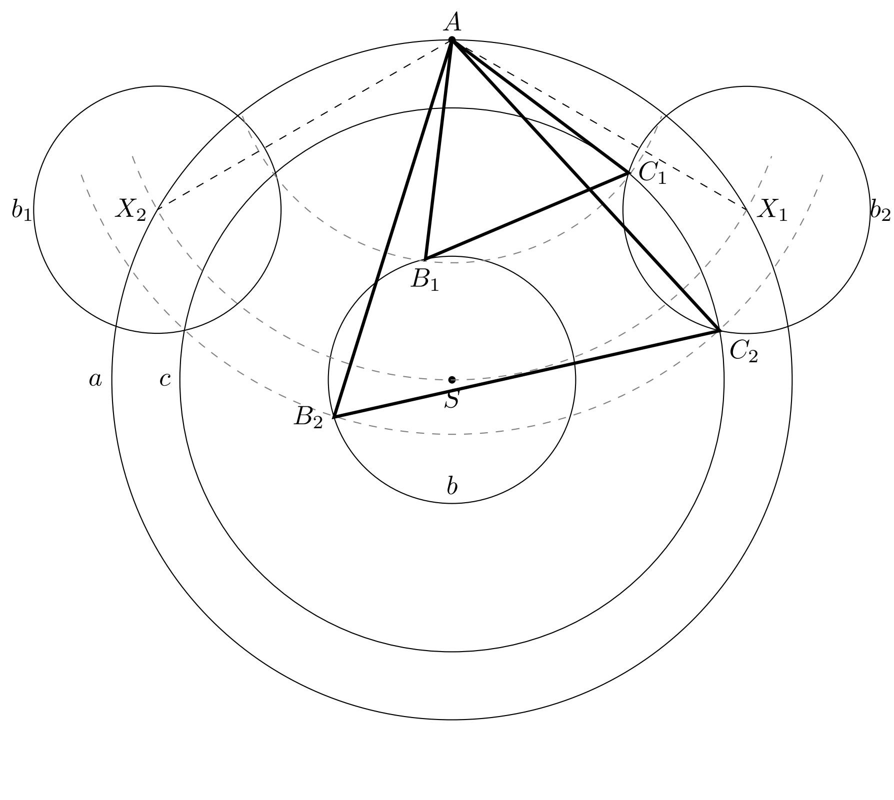


2 Shodná zobrazení

2.1 Otočení

Příklad 2.1. Jsou dány tři různé soustředné kružnice a, b a c. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby A ležel na a, B ležel na b a C ležel na c.

Řešení. Zvolíme vrchol A na a. Pro bod C pak platí, že je obrazem bodu B v otáčení se středem v A o úhel $60°$ (nebo $-60°$). Protože obecně obraz bodu X, který leží na množině M, leží na obrazu množiny M, bude bod C – obraz bodu B – ležet na na zobrazené množině b. Proto otočíme kružnici b kolem středu A o úhel $60°$, nalezneme průsečíky této otočené kružnice s kružnicí c a tyto průsečíky jsou možné vrcholy C. Vrcholy B pak nalezneme otočením zpět.

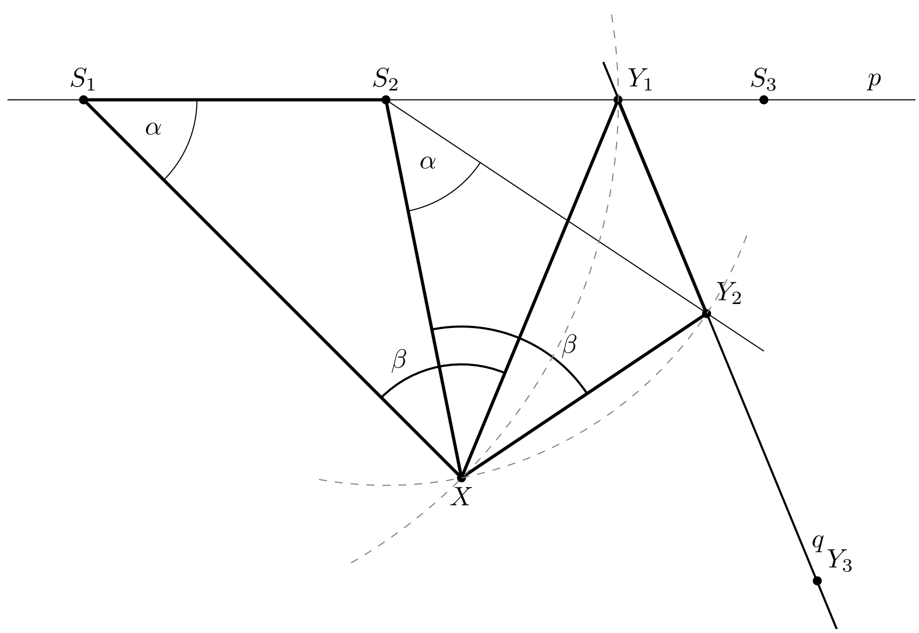


Obrázek 2.1: Konstrukce k příkladu 2.1

Příklad 2.2. Je dán bod A a dvě různé soustředné kružnice b a c. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby B ležel na b a C ležel na c.

Řešení. Zřejmé – je to zvolený bod A v předchozím řešení.

Příklad 2.3. Je dána přímka p a bod X. Na přímce a je libovolně dán bod S. Uvažujme bod Y – obraz bodu X v otáčení se středem v bodě S o úhel α. Dokažte, že množina všech bodů Y je přímka.

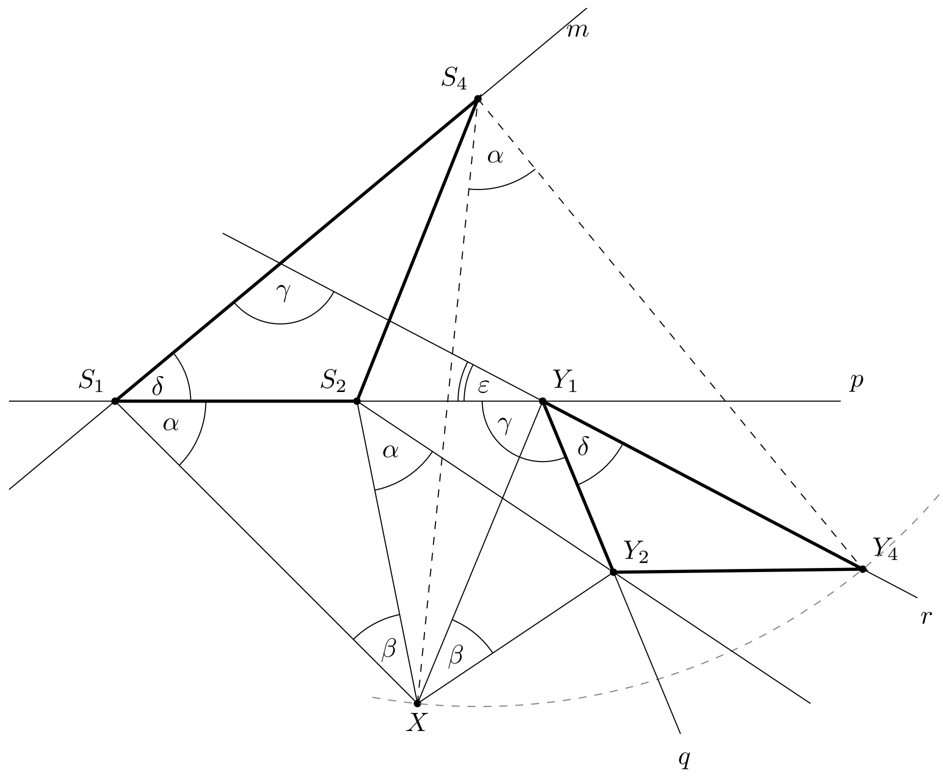


Obrázek 2.2: Konstrukce k důkazu 2.3

Řešení. Na přímce p jistě leží bod S_1 pro který platí, že přímka S_1X svírá s přímkou p právě úhel α. Zvolme tento bod S_1, obraz bodu X v otočení se středem v S_1 o úhel α označme Y_1. Zvolme dále na p libovolný bod S_2, obraz bodu X v otočení se středem v S_2 o úhel α označme Y_2. Trojúhelníky XS_1Y_1 a XS_2Y_2 jsou oba rovnoramenné s vnitřním úhlem při hlavním vrcholu rovným α. Proto jsou podobné. Z této podobnosti vyplývá, že a mají shodné i vnitřní úhly při základně – označme je β, proto jsou shodné i úhly $\sphericalangle S_1XS_2$ a $\sphericalangle Y_1XY_2$. Z podobnosti trojúhelníků XS_1Y_1 a XS_2Y_2 dále plyne rovnost poměrů $|XY_1| : |S_1X| = |XY_2| : |S_2X|$ (délka základny k délce ramena), proto jsou podobné trojúhelníky S_1XS_2 a Y_1XY_2 podle věty sus o podobnosti trojúhelníků. Odtud plyne, že velikost úhlu $\sphericalangle XY_1Y_2$ se rovná velikosti úhlu

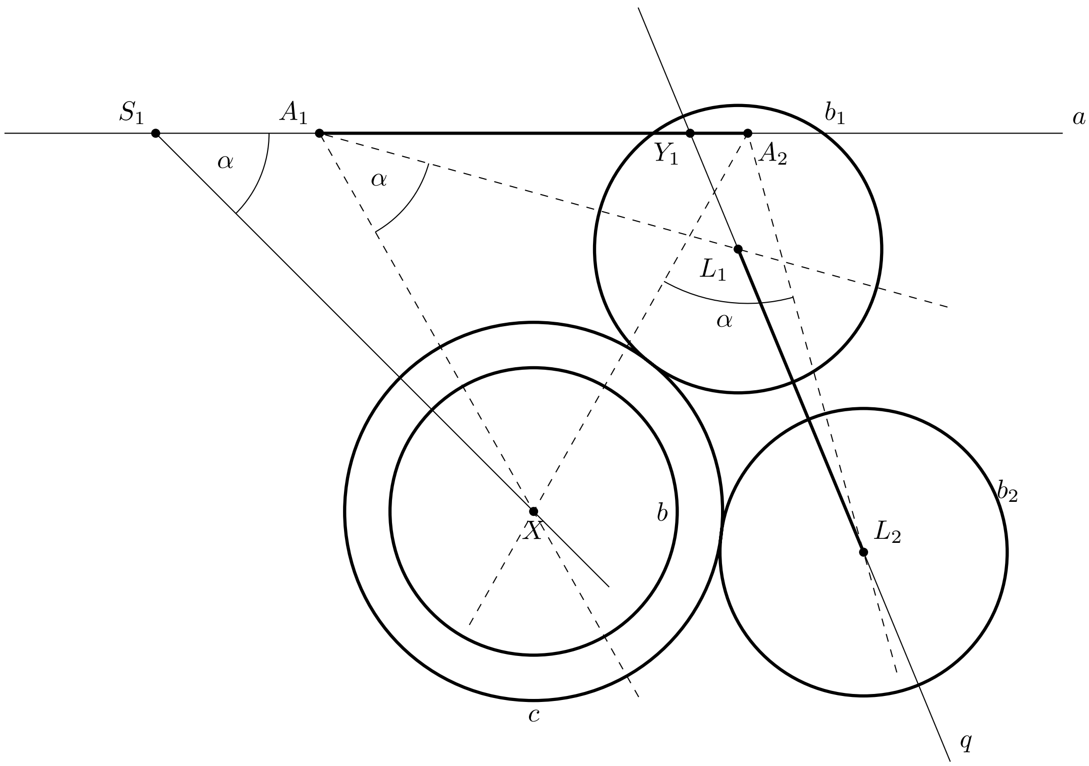
$\sphericalangle XS_1S_2 = \alpha$. Zvolíme-li na přímce p další bod S_3, stejným postupem ukážeme, že i velikost úhlu $\sphericalangle XY_1Y_3$ se rovná α. Body Y_1, Y_2 a Y_3 tedy leží na přímce. Důkaz je hotov.

Podobně bychom mohli postupovat, kdybychom zvolili bod S_4 mimo přímku p a chtěli ukázat, že množina obrazů bodů X ve středových souměrnostech se středy ve všech bodech trojúhelníku $S_1S_2S_4$ je trojúhelník $Y_1Y_2Y_4$ s trojúhelníkem $S_1S_2S_4$ podobný. Vedli bychom přímku $m = S_1S_4$ a obdobně ukázali, že množina všech obrazů bodů X ve středových souměrnostech se středy na přímce m je přímka r, která s m svírá úhel γ, stejný úhel, jako svírá přímka q s přímkou p. Odchylka přímek p a m, označme ji δ, se tak musí rovnat odchylce přímek q a r (v obrázku vidíme, že $\gamma+\delta+\epsilon = 180°$, bod S_1 je průsečíkem přímek m a p, bod Y_1 proto musí být průsečíkem přímek q a r). Odtud už bezprostředně vyplyne, že trojúhelníky $S_1S_2S_4$ a $Y_1Y_2Y_4$ jsou podobné, protože koeficient k podobnosti je poměr délek základny a ramena rovnoramenného trojúhelníku s vnitřním úhlem při hlavním vrcholu o velikosti α, tedy $k = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, nezávisí tedy na volbě středu otáčení, tedy na volbě bodu S.



Obrázek 2.3: Konstrukce k důkazu z příkladu 2.3

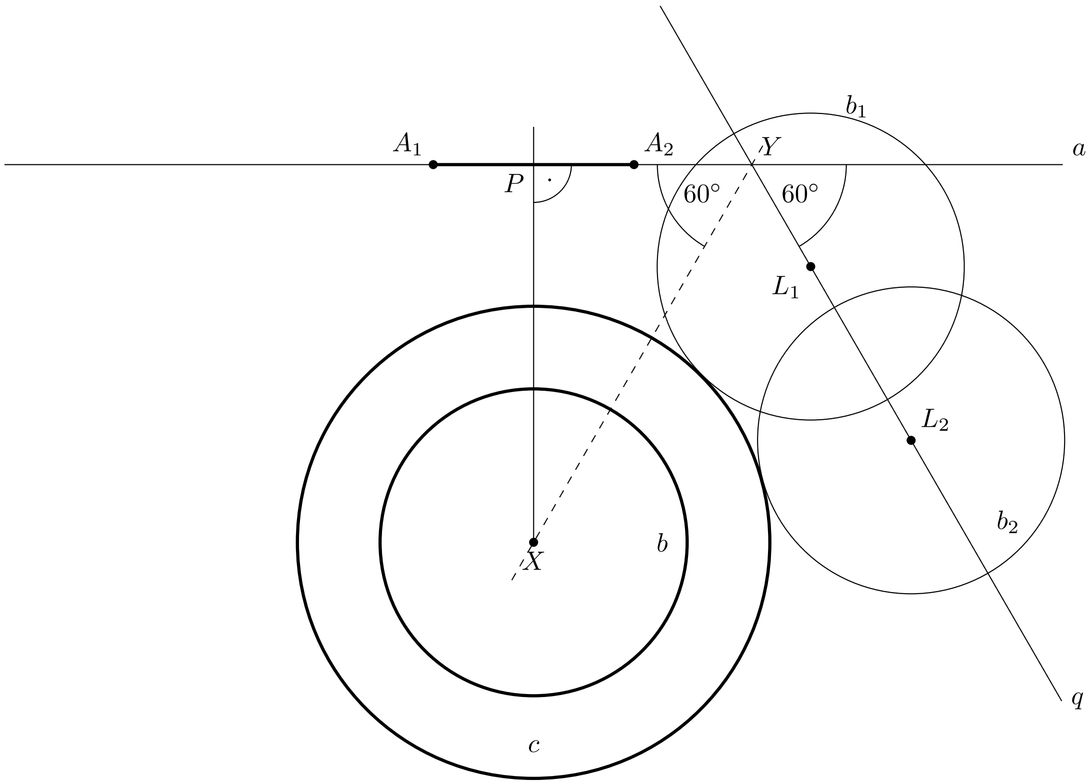
K řešitelnosti úlohy:



Obrázek 2.4: Řešitelnost obecně

Úloha má řešení (pro obecný úhel α), když bude bod A zvolen na úsečce A_1A_2. Na obrázku jsou pak nakresleny krajní polohy otočených kružnic b, pro které má úloha vždy jedno řešení. Z podobnosti, kterou jsme odvodili v předchozím důkaze plyne, že trojúhelníky XA_1A_2 a XL_1L_2 jsou podobné, koeficient podobnosti je $k = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$. Geometricky tedy úsečku A_1A_2 najdeme tak, že najdeme mezní polohy kružnic b_1 a b_2 a sestrojíme trojúhelník XA_1A_2 podobný s trojúhelníkem XL_1L_2 tak, aby základna A_1A_2 ležela na a. Výpočet trigonometricky pomocí této podobnosti.

V našem konkrétním případě, kdy má úhel otáčení velikost $60°$, je podobnost shodností, proto $A_1A_2 = L_1L_2$ a vzdálenost $|aX| = |qX|$. Konstrukce: Sestrojíme kružnice b_1 a b_2, které mají střed na přímce q a mají s kružnicí c vnější dotyk. Jejich středy jsou body L_1 a L_2. Úsečku L_1L_2 přeneseme na přímku a (získáme hledanou úsečku A_1A_2) tak, aby střed úsečky A_1A_2 byl patou kolmice spuštěné z bodu X na přímku a.



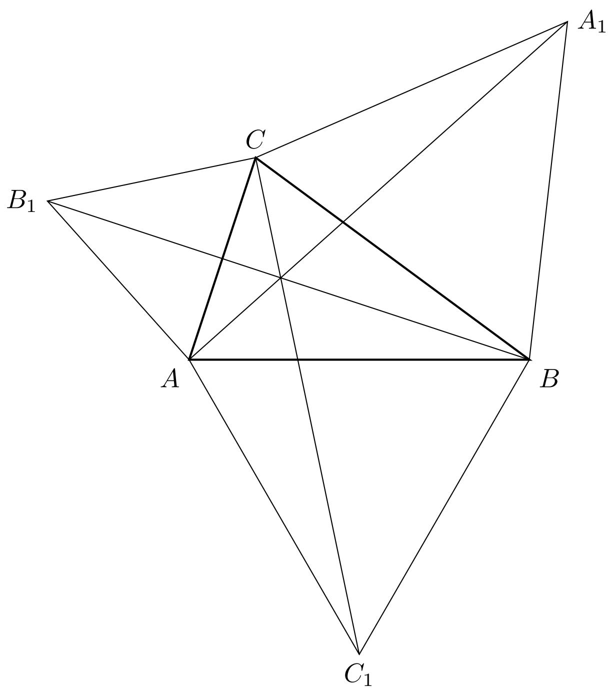
Obrázek 2.5: Situace v případě $\alpha = 60°$

Poznamenejme, že při otáčení opačným směrem bude situace identická, jen přímka q bude ležet vlevo od kružnic b a c. Získáme tutéž úsečku A_1A_2. Dále můžeme říci, že pro nalezení úsečky A_1A_2 byla konstrukce přímky q zbytečná, bylo možné nalézt body L_1 a L_2 přímo na přímce a – byly by to přímo body A_1 a A_2. Délku úsečky A_1A_2 určíme jako dvojnásobek délky úsečky PA_2, kterou vypočítáme pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku XPA_2. $|XP|$ je daná délka ze zadání (určuje umístění přímky a vzhledem ke kružnicím b a c) a $|XA_2|$ má délku rovnu součtu poloměrů kružnic b a c.

Příklad 2.4. Na stranách trojúhelníka ABC jsou vně sestrojeny rovnostranné trojúhelníky A_1CB, B_1AC a AC_1B. Dokažte, že $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$.

Řešení. Při otočení se středem C o úhel $60°$ v záporném smyslu se bod A zobrazí na bod B_1 a bod A_1 na bod B. Úsečka AA_1 se proto zobrazí na úsečku B_1B. Dále při otočení se středem A o úhlem $60°$ v záporném smyslu se bod B zobrazí na bod C_1

a bod B_1 na bod C. Úsečka BB_1 se tedy zobrazí při tomto otočení na úsečku C_1C. Odsud již vyplývá, že $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$.



Obrázek 2.6: Konstrukce k příkladu 2.4

2.2 Středová souměrnost

Příklad 2.5. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno t_a, m_b a m_c, kde m_b je množina (podmínka) pro bod B a m_c je množina (podmínka) pro bod C.

Řešení. Možný postup řešení: Umístíme těžnici t_a (úsečku AS_a, S_a označíme střed strany BC), dále sestrojíme množinu m_b a množinu m_c – podle podmínek úlohy. Protože je S_a střed strany BC, je bod C obrazem bodu B ve středové souměrnosti se středem právě v S_a. Je zřejmé, že pokud bod X leží na množině M, leží jeho obraz v libovolném zobrazení na obrazu množiny M v tomto zobrazení. Proto leží bod B – obraz bodu C na obrazu množiny m_b v uvažované středové souměrnosti se středem v bodě S_a. Sestrojíme tedy tento obraz množiny m_b, nalezneme jeho společné body s množinou m_c a tyto společné body jsou body C – vrcholy trojúhelníku ABC. Odpovídající vrcholy pak najdeme snadno tak, že použijeme S_a jako střed strany BC. Řešitelnost úlohy závisí na počtu bodů C.

Příklad 2.6. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno

- t_a, t_b a t_c. m_b je pak kružnice $k(T, \frac{2}{3}t_b)$, m_c je pak kružnice $l(T, \frac{2}{3}t_c)$.
- t_a, t_b a γ. m_b je pak kružnice $k(T, \frac{2}{3}t_b)$, m_c je množina všech bodů X, ze kterých je vidět úsečku AS_a pod úhlem γ – oblouk.
- t_a, β a γ. m_b je pak množina všech bodů X, ze kterých je vidět úsečku AS_a pod úhlem β – oblouk, m_c je množina všech bodů Y, ze kterých je vidět úsečku AS_a pod úhlem γ – druhý oblouk.
- t_a, t_b a v_b. m_b je pak kružnice $k(T, \frac{2}{3}t_b)$, m_c je tečna ke kružnici $l(S_a, \frac{1}{2}v_b)$ vedená bodem A – bod S_a má od strany b poloviční vzdálenost než bod B.
- t_a, β a v_b. m_b je pak množina všech bodů X, ze kterých je vidět úsečku AS_a pod úhlem β – oblouk, m_c je tečna ke kružnici $l(S_a, \frac{1}{2}v_b)$ vedená bodem A – bod S_a má od strany b poloviční vzdálenost než bod B.
- t_a, v_b a v_c. m_b je tečna ke kružnici $k(S_a, \frac{1}{2}v_b)$ vedená bodem A – bod S_a má od strany b poloviční vzdálenost než bod B, m_c je tečna ke kružnici $l(S_a, \frac{1}{2}v_c)$ vedená bodem A – bod S_a má od strany c poloviční vzdálenost než bod C.

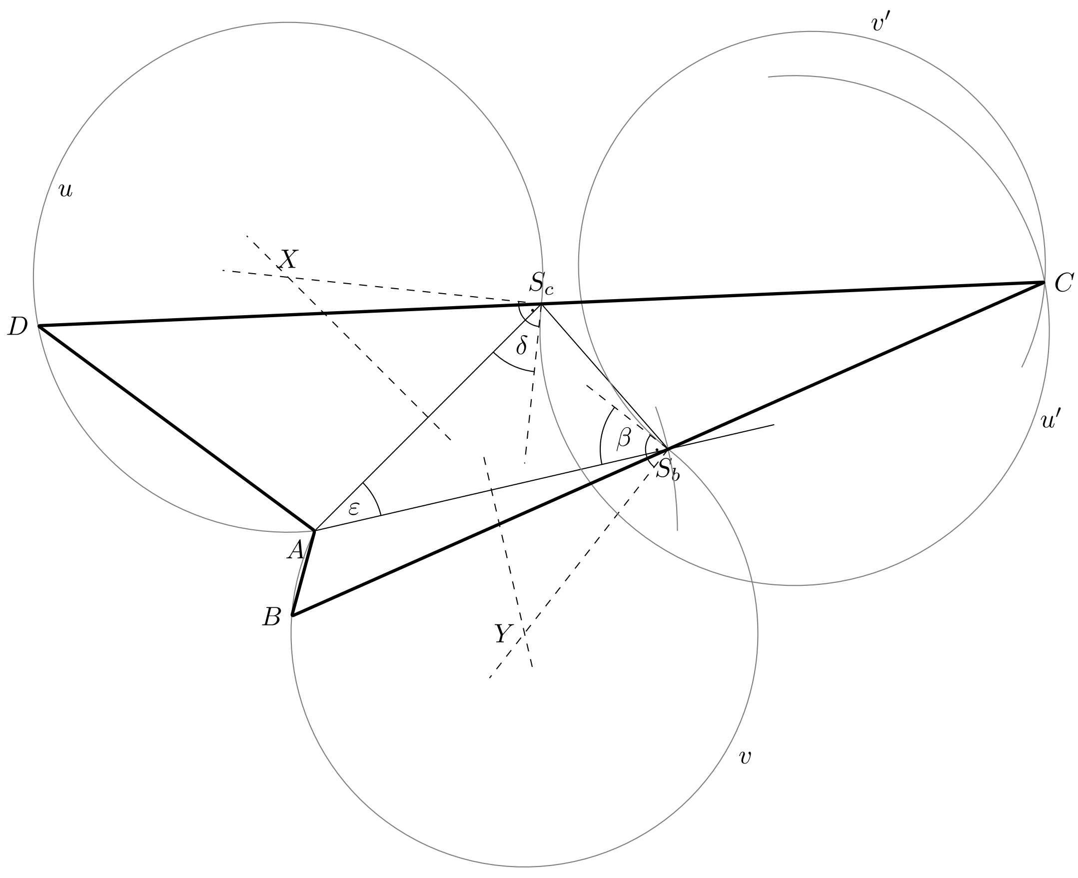
Příklad 2.7. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno $|AS_b|$ (S_b je střed BC), v_a (výška na úsečku AB), $|AC|$.

Řešení. Zde sestrojíme nejdříve trojúhelník ABC, kde vycházíme z jeho „těžnice“ AS_b, jedna z množin je pak tečna ke kružnici $k(S_b, \frac{1}{2}v_a)$ vedená bodem A – bod S_b má od strany AB poloviční vzdálenost než bod C, druhá z množin je pak kružnice $l(A, |AC|)$. Vrchol D najdeme pomocí rovnoběžnosti.

Příklad 2.8. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$, je-li dáno $|CS_a|$ (S_a je střed AB), velikost ostrého úhlu $\sphericalangle CAB$, β a δ.

Řešení. Nejdříve sestrojíme trojúhelník ABC, kde známe těžnici a dva vnitřní úhly – začneme těžnicí, množiny, jejichž společné body po zobrazení budeme hledat jsou oblouky určené vnitřními úhly β a $\sphericalangle CAB$, vrchol D pak snadno najdeme pomocí rovnoběžky s AB vedené bodem C a např. pomocí polopřímky vedené bodem A, která s AB svírá úhel $180° - \delta$.

Příklad 2.9. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno $|AS_b|$ (S_b je střed BC), $|AS_c|$ (S_c je střed CD), β, δ a velikost úhlu $\epsilon = \sphericalangle S_bAS_c$.



Obrázek 2.7: Konstrukce k příkladu 2.9

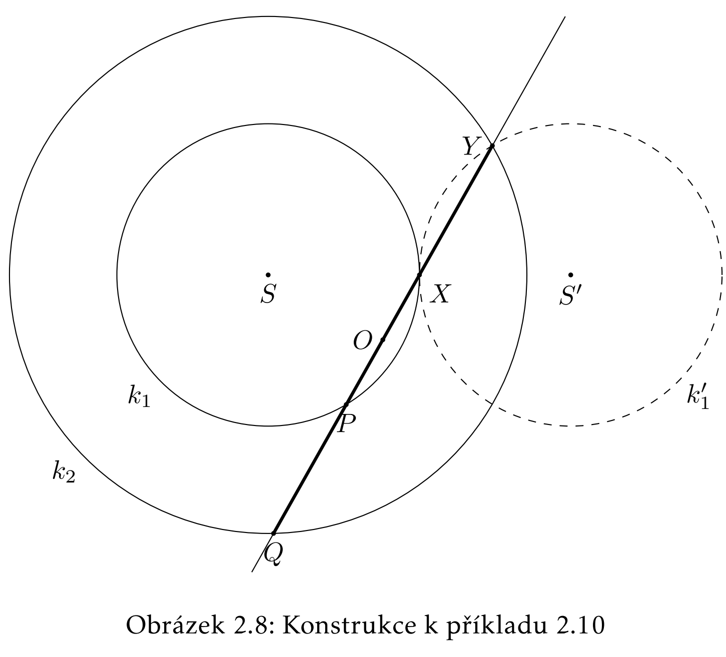
Řešení. Nejdříve sestrojíme trojúhelník S_bAS_c podle věty *sus*. Vrchol D leží na množině M všech bodů X, ze kterých je úsečka AS_c vidět pod úhlem δ (oblouk), vrchol B leží na množině N všech bodů Y, ze kterých je úsečka AS_b vidět pod úhlem β (oblouk). Vrchol C pak leží na zobrazené množině M ve středové souměrnosti se středem S_c a na zobrazené množině N ve středové souměrnosti se středem S_b (tedy v průniku těchto obrazů). Vrcholy B a D pak snadno najdeme pomocí polopřímek CS_b a CS_c.

Na obrázku je sestrojeno pouze jedno ze čtyř řešení. Je třeba vykreslit obě dvojice oblouků, zobrazené dvojice oblouků pak budou mít až čtyři společné body.

Příklad 2.10. Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1 a k_2. Sestrojte přímku l, na které tyto kružnice vytínají tři shodné úsečky.

Řešení. Označme r_1 poloměr kružnice k_1 a r_2 poloměr kružnice k_2. Nechť je pro jednoznačnost $r_1 < r_2$. Zvolíme na kružnici k_1 libovolný bod X. Buď k'_1 obraz kružnice k_1 při symetrii se středem X a Y průsečík kružnic k'_1 a k_2.

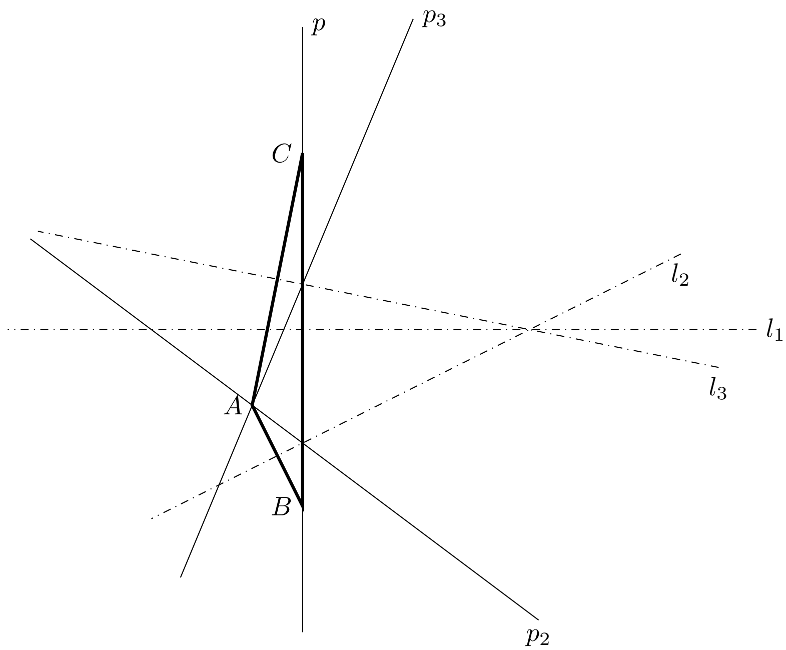
Ukážeme, že XY je hledaná přímka l. Označme $P \neq X$ průsečík přímky XY s kružnicí k_1, $Q \neq Y$ průsečík přímky XY s kružnicí k_2 a O střed úsečky YQ, a tedy i úsečky XP (tedy $|YO| = |QO| \wedge |PO| = |XO|$). Bod Y je symetrický s bodem P podle středu X (tedy $|XY| = |XP|$). Odsud dostáváme, že $|QO| - |PO| = |YO| - |XO|$, to znamená, že $|XY| = |QP|$, a tedy $|YX| = |XP| = |PQ|$.



Obrázek 2.8: Konstrukce k příkladu 2.10

2.3 Osová souměrnost

Příklad 2.11. Jsou dány tři přímky l_1, l_2 a l_3, které se protínají v jednom bodě, a bod A_1 ležící na přímce l_1. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bod A_1 byl středem jeho strany BC a přímky l_1, l_2 a l_3 byly osami jeho stran.



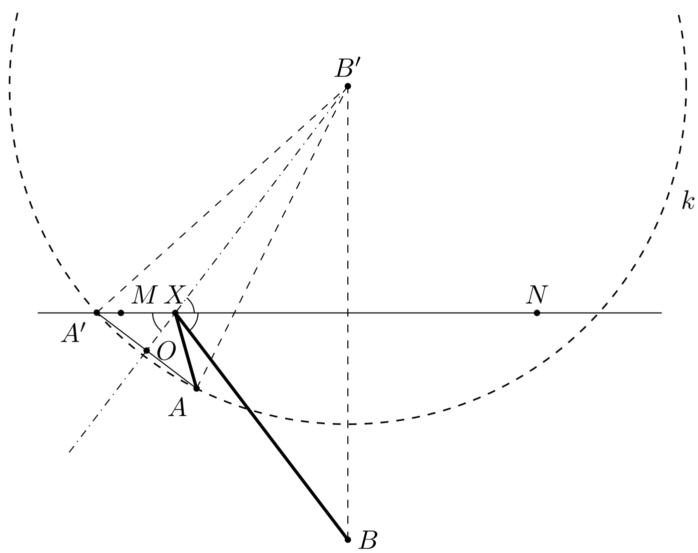
Obrázek 2.9: Konstrukce k příkladu 2.11

Řešení. Bodem A_1 veďme přímku p, která je na l_1 kolmá. Buď p_2 přímka, která je osově souměrná s přímkou p podle přímky l_2. Buď p_3 přímka, která je osově souměrná s přímkou p podle přímky l_3. Vrchol A hledaného trojúhelníka ABC je průsečíkem přímek p_2 a p_3. Body B a C pak leží na přímce p, přičemž B je osově souměrný s bodem A podle přímky l_2 a bod C je osově souměrný s bodem A podle přímky l_3.

Příklad 2.12. Je dána přímka MN a dva body A a B ležící v jedné polorovině vzhledem k MN. Sestrojte na přímce MN bod X tak, aby $|\sphericalangle AXM| = 2|\sphericalangle BXN|$.

Řešení. Předpokládejme, že je bod X sestrojen. Buď B' bod, který je osově souměrný s bodem B podle přímky MN. Kružnice se středem B' a poloměrem $|AB'|$ protíná přímku MN v bodě A'. Buď O střed úsečky AA'. Přímka $B'O$ je tedy osou úhlu $\sphericalangle AB'A'$. Potom ale také $B'X$ musí být osou úhlu $\sphericalangle AB'A'$, neboť platí $\frac{1}{2}|\sphericalangle AXM| = |\sphericalangle MXO| = |\sphericalangle B'XN| = |\sphericalangle BXN|$. Odsud přímo plyne rovnost $|\sphericalangle AXM| = 2|\sphericalangle BXN|$.

Bod X tedy nalezneme jako průsečík přímek $B'O$ a MN, kde O je střed úsečky AA'.



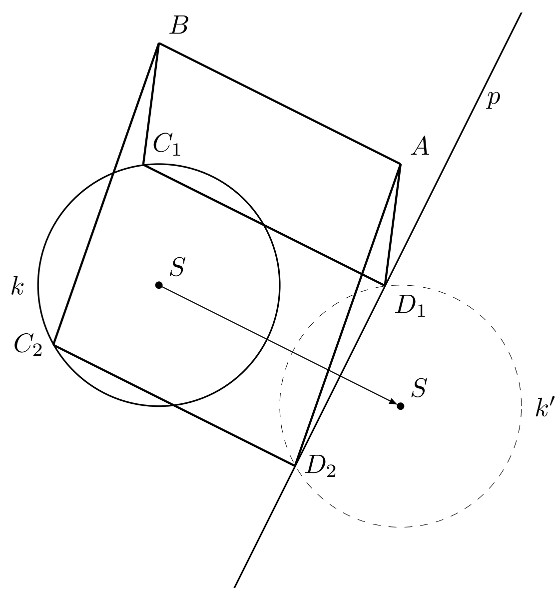
Obrázek 2.10: Konstrukce k příkladu 2.12

2.4 Posunutí

Příklad 2.13. Je dána úsečka AB, kružnice k a přímka p. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, aby bod C ležel na kružnici k a bod D na přímce p. (Je dán vektor posunutí – součást útvaru)

Řešení. Vrchol C obdélníku $ABCD$ má ležet na k, vrchol D má ležet na p. Protože v obdélníku platí $CD||AB$ a $|AB| = |CD|$, můžeme uvažovat posunutí, ve kterém je bod A obrazem bodu B, a tedy bod D je obrazem bodu C. Zobrazíme tedy v tomto posunutí kružnici k, získáme kružnici k', množinu bodů, na které leží bod $C' = D$. Bod D je průsečíkem kružnice k' a přímky p. Bod C nalezneme posunutím zpět.

Obecně je možné uvažovat dvě posunutí, jedno dané vektorem $\mathbf{AB}$ a druhé dané vektorem $\mathbf{BA}$. V obou posunutích mohou mít přímka p s kružnicí k' společné body. Jen v jednom případě jde ale o rovnoběžník $ABCD$, ve druhém případě o uzavřenou lomenou čáru $ABCD$, která se protíná (resp. rovnoběžník je $ABDC$). Aby šlo o rovnoběžník $ABCD$, je v našem případě uvažováno posunutí dané vektorem $\mathbf{BA}$.

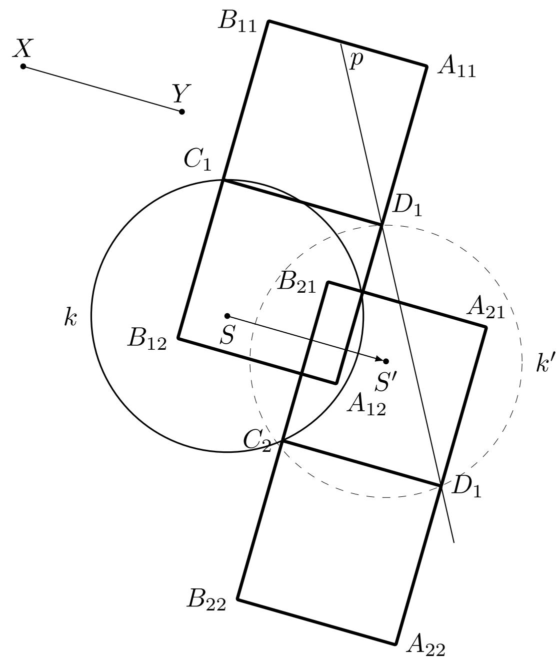


Obrázek 2.11: Konstrukce k příkladu 2.13

Příklad 2.14. Je dána úsečka XY, přímka p a kružnice k. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod C ležel na kružnici k, bod D ležel na přímce p a strana CD byla rovnoběžná s úsečkou XY a měla délku rovnu $|XY|$. (Je dán vektor posunutí – mimo útvar)

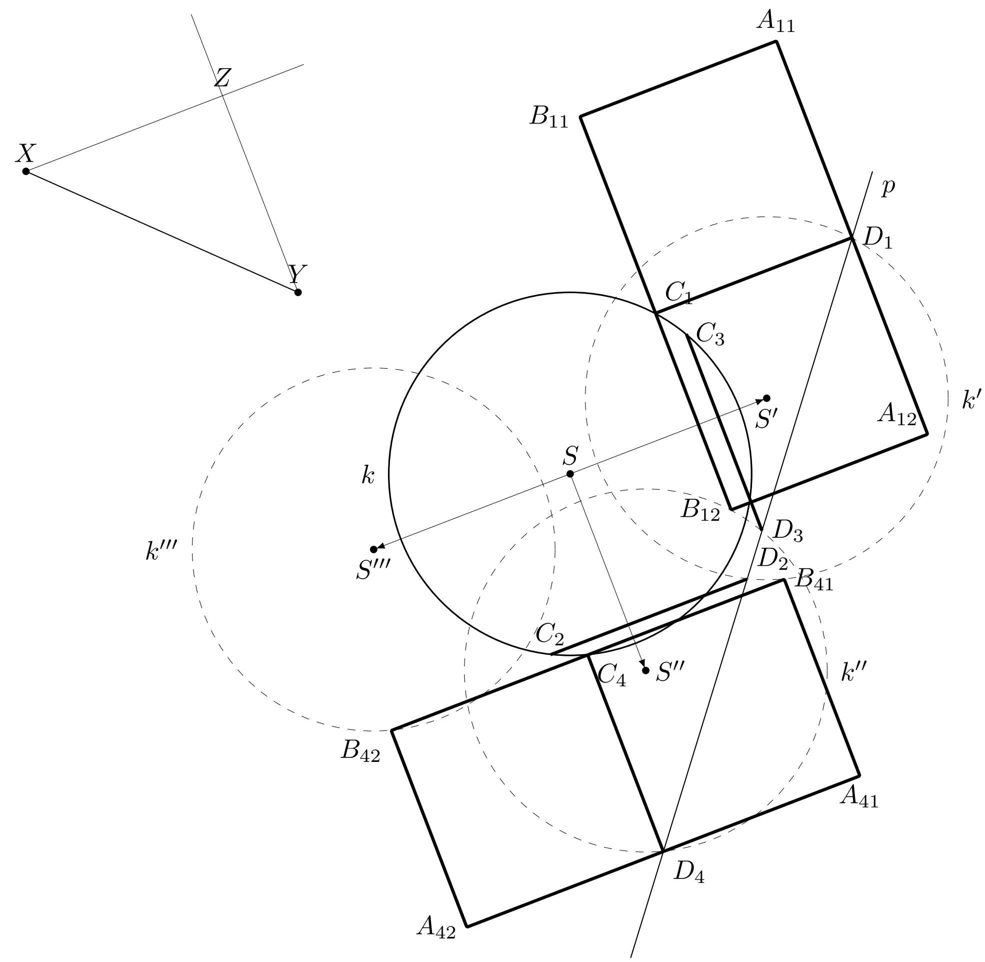
Řešení. Řešení je analogické s úlohou 2.3. Opět uvažujeme posunutí, ve kterém je bod C vzorem bodu D, najdeme tedy obraz k' kružnice k v tomto posunutí a průsečíky k' s p. Získáme tak vrchol D čtverce, posunutím zpět pak vrchol C. Čtverec $ABCD$ sestrojíme pomocí kolmic a známé délky strany.

Opět musíme uvažovat dvě možná posunutí, jedno je dáno vektorem $\mathbf{XY}$, druhé vektorem $\mathbf{YX}$. V obou posunutích může mít kružnice k' s přímkou p společné body, každý společný bod – vrchol D hledaného čtverce – určuje dvě řešení, celkem může být až osm řešení.



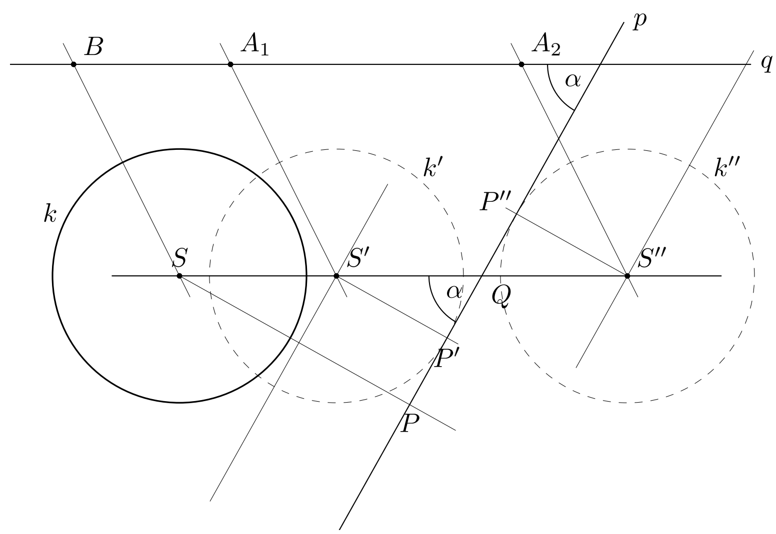
Obrázek 2.12: Konstrukce k příkladu 2.14

Příklad 2.15. Je dána úsečka XY, přímka p a kružnice k. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod C ležel na kružnici k, bod D ležel na přímce p a některá z jeho úhlopříček byla rovnoběžná s úsečkou XY a měla délku rovnu $|XY|$. (Je dán vektor posunutí, musím ho odhalit).



Obrázek 2.13: Konstrukce k příkladu 2.15

Řešení. Řešení úlohy je obdobné jako řešení úloh předchozích. Uvažujeme posunutí, ve kterém je vrchol C vzorem vrcholu D, najdeme tedy opět obraz k' kružnice k v tomto posunutí a průsečíky k' s p. Vektor posunutí ovšem není na první pohled zřejmý. Má-li totiž být XY rovnoběžná a stejně dlouhá jako úhlopříčka čtverce $ABCD$, bude směr posunutí s úsečkou XY svírat úhel $45°$ a bude mít délku strany čtverce, v němž je XY úhlopříčkou. Sestrojme tedy nejdříve takový pomocný čtverec (nebo jeho jeden vrchol Z). Musíme pak uvažovat čtyři posunutí, která jsou dána vektory **XZ**, **ZX**, **YZ** a **ZY**. Je možných až 16 řešení – každá zobrazená kružnice může protnout přímku p ve dvou bodech D a každý z těchto bodů je vrcholem dvou hledaných čtverců. V situaci na obrázku je osm možných řešení, zakreslena jsou jen čtyři, pro zbývající čtyři jsou narýsovány jen úsečky CD.



Obrázek 2.14: Konstrukce k příkladu 2.16

Příklad 2.16. Je dána přímka q, bod B na q, přímka p a kružnice k. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ tak, aby bod A ležel na přímce q, bod C na p a bod D na k. (Je dán vektor posunutí, jenom směr.)

Řešení. Úloha je analogická s úlohou 2.13, jen diskuze je obsažnější. Bod A zvolíme na přímce q a uvažujeme posunutí dané vektorem **BA**, ve kterém zobrazíme kružnici k, najdeme průniky kružnice k' s přímkou p a sestrojíme rovnoběžník. Bude však třeba stanovit podmínky pro to, aby kružnice k' měla s přímkou p společné body.

Na obrázku jsou sestrojeny kružnice k' a k'', které mají s přímkou p jeden společný bod. Konstrukčně tak najdeme body A_1 a A_2. Bod A je bodem úsečky A_1A_2, aby měla úloha řešení.

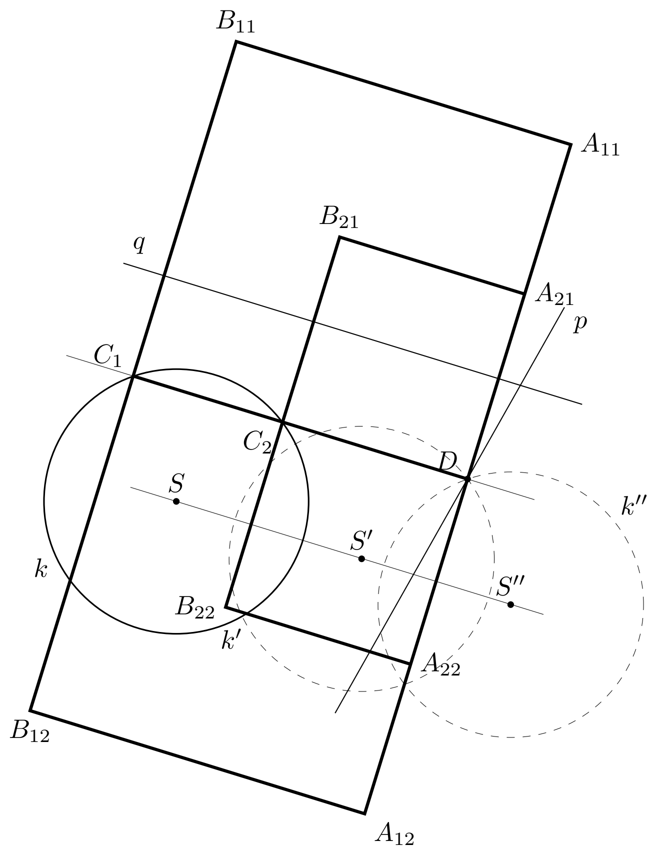
Výpočtem určíme délku úsečky A_1A_2 pomocí podobnosti trojúhelníků $S'QP'$ a SPQ. Délka úsečky $S'P'$ se rovná poloměru dané kružnice k, délka úsečky SP je daná vzdálenost středu S od přímky p – obě tyto hodnoty, stejně jako velikost úhlu α plynou ze zadání.

Příklad 2.17. Je dána přímka q, přímka p a kružnice k. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod C ležel na kružnici k, bod D ležel na přímce p a CD byla rovnoběžná s přímkou XY. (Je dán vektor posunutí, jenom směr.)

Řešení. Analogické s předchozí úlohou, diskuze o řešitelnosti také.

Příklad 2.18. Je dána přímka q, přímka p, kružnice k a bod D na přímce p. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod C ležel na kružnici k a CD byla rovnoběžná s přímkou q. (Je dán vektor posunutí, jenom směr, délku je třeba určit.)

Řešení. Uvažujeme posunutí, které je dáno vektorem rovnoběžným s přímkou q. Je třeba určit délku tohoto vektoru. V tomto posunutí má být bod C kružnice k vzorem bodu D. Proto vedeme bodem D přímku rovnoběžnou s přímkou q, najdeme její průsečíky s kružnicí k a získáme tak body C. Čtverec dokončíme pomocí kolmic a délky strany. Jsou možná nejvýše čtyři řešení – viz obrázek.



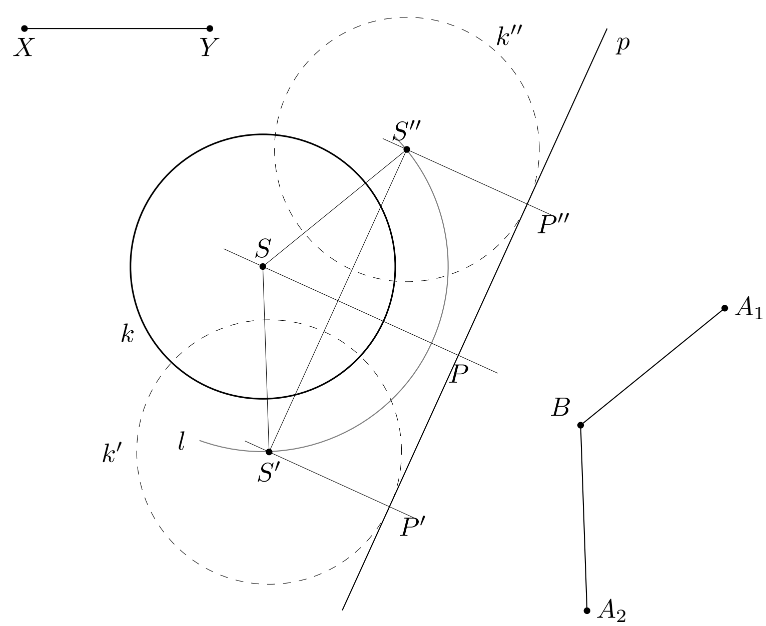
Obrázek 2.15: Konstrukce k příkladu 2.18

Příklad 2.19. Je dán bod B, úsečka XY, přímka p a kružnice k. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ tak, aby $|AB| = |XY|$, bod C ležel na p a bod D na k. (Je dán vektor posunutí, jenom délka)

Řešení. Úloha je analogická s úlohou 2.13. Zvolíme bod A ve vzdálenosti $d = |XY|$. Pak uvažujeme posunutí dané vektorem $\mathbf{BA}$. Je třeba diskutovat řešitelnost úlohy.

Úloha bude mít řešení právě tehdy, když bude mít kružnice k' – obraz kružnice k v uvažovaném posunutí – společný bod s přímkou p.

Na obrázku jsou nakresleny mezní polohy posunuté kružnice k, pro které má úloha řešení. V našem případě bude mít úloha řešení pro ta posunutí, jejichž vektory leží „mezi“ vektory $\mathbf{BA_2}$ a $\mathbf{BA_1}$. Směr určíme jako odchylku vektoru od přímky p. Mezní úhly jsou $SS'S''$ a $SS''S'$. Konstrukčně tedy budeme postupovat tak, že nalezneme středy S' a S'' jako průsečíky přímky, která má od p vzdálenost rovnu poloměru r dané kružnice k a kružnice, která má střed S a poloměr d. Početně budeme postupovat tak, že určíme vnitřní úhly při základně v rovnoramenném trojúhelníku $SS'S''$ s ramenem délky d a výškou $w - r$, kde w je vzdálenost středu S od přímky p. Obecně může být další mezní pozicí kružnice k' kružnice, která se dotýká přímky p v opačné polorovině, než leží bod S. Pak budeme řešit další rovnoramenný trojúhelník s rameny d, který bude bude mít výšku $w + r$.

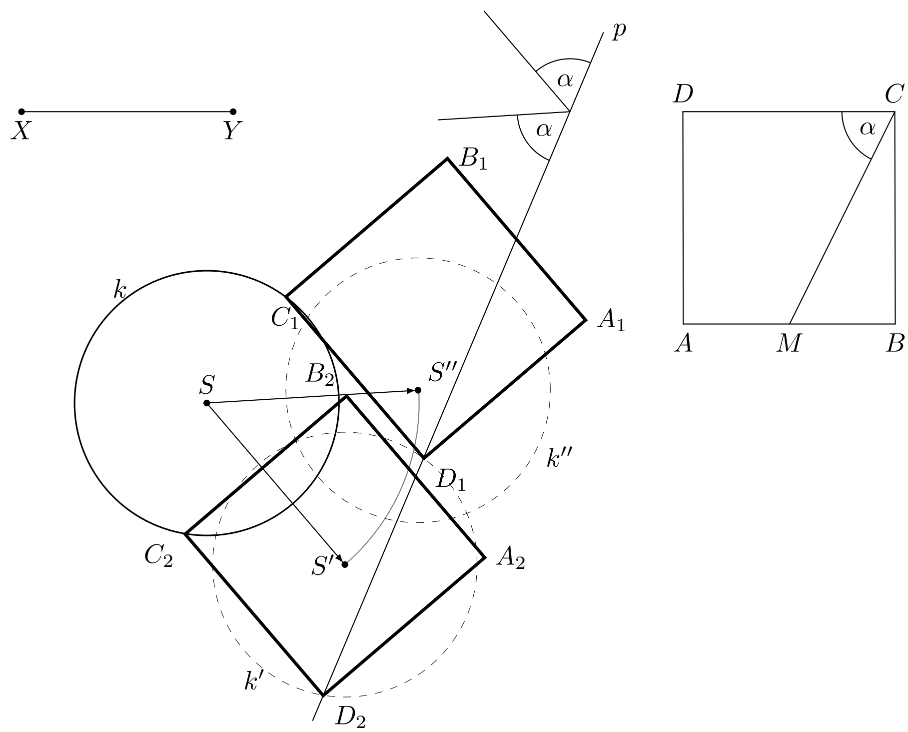


Obrázek 2.16: Konstrukce k příkladu 2.19

Příklad 2.20. Je dán bod A, úsečka XY, přímka p a kružnice k. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $|AB| = |XY|$, bod C ležel na p a bod D na k. (Je dán vektor posunutí, jenom délka)

Řešení. Úloha je zcela analogická s předchozí úlohou.

Příklad 2.21. Je dána úsečka XY, přímka p a kružnice k. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $|AB| = |XY|$, bod D ležel na p, bod C na k a střed strany AB ležel na přímce p. (Je dán vektor posunutí, jenom délka, směr je třeba zjistit).



Obrázek 2.17: Konstrukce k příkladu 2.21

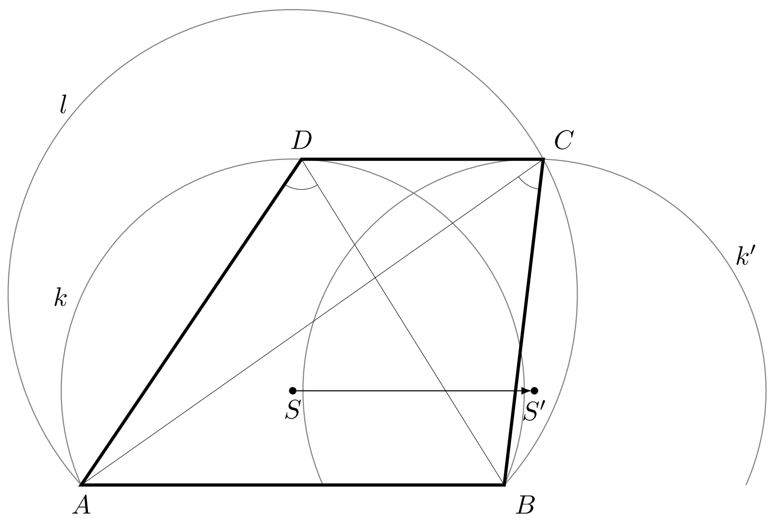
Řešení. Je-li M střed strany AB, musí úsečka CM ležet na přímce p, proto strana CD svírá s přímkou p úhel rovný úhlu MCD. Směr posunutí je tedy směr přímky, která svírá s přímkou p úhel MCD.

Sestrojíme tedy tento úhel α, přeneseme jej k přímce p a zobrazíme kružnici k v posunutí určeném těmito vektory (s délkou $|XY|$). Průsečíky kružnice k' s přímkou

p jsou body D, body C získáme posunutím zpět a čtverec dokončíme pomocí kolmic a známé délky strany.

Musíme uvažovat čtyři vektory posunutí, každá posunutá kružnice může mít dva průsečíky s přímkou p, je tedy až osm možných řešení. V našem případě má úloha čtyři řešení, sestrojena jsou řešení pro kružnici k'.

Příklad 2.22. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, $AB||CD$, jestliže je dáno $|AB|$, $|CD|$, velikost úhlu ACB a velikost úhlu ADB. (Nepolohová úloha, vektor je dán.)



Obrázek 2.18: Konstrukce k příkladu 2.22

Řešení. Stranu AB máme dánu, dále máme dánu množinu l – oblouk – množinu všech bodů C, pro které platí, že úhel ACB má danou velikost, podobně máme dánu množinu k – oblouk – množinu všech bodů C, pro které platí, že úhel ACB má danou velikost.

Uvažujme posunutí, ve kterém je obrazem bodu D bod C. Toto posunutí je dáno vektorem, který je rovnoběžný se základnami lichoběžníku a který má délku rovnu $|CD|$. Zobrazíme tedy v tomto posunutí množinu všech bodů D – oblouk k – a nalezneme průsečík oblouku k' s množinou l. Tím získáme bod C, bod D pak najdeme posunutím zpět.

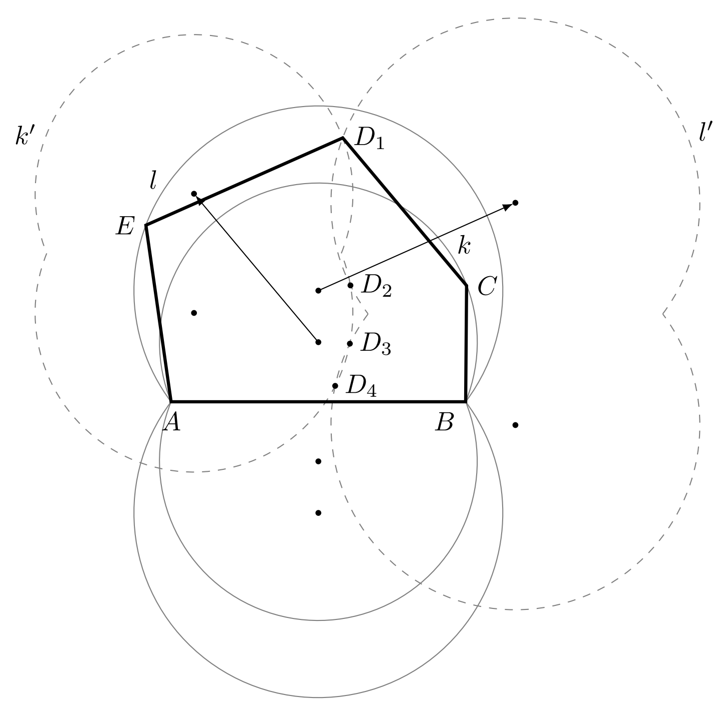
Příklad 2.23. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, $AB||CD$, jestliže je dáno $|AB|$, $|CD|$, velikost úhlu ACB a $|AD|$. (Nepolohová úloha, vektor je dán)

Řešení. Analogicky s předchozí úlohou, místo oblouku k je dána kružnice $k(A, |AD|)$.

Příklad 2.24. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, $AB||CD$, jestliže je dáno $|AB|$, $|CD|$, velikost úhlu ACB a $|BD|$. (Nepolohová úloha, vektor je dán.)

Řešení. Analogicky s úlohou 2.22, místo oblouku k je dána kružnice $k(B, |BD|)$.

Příklad 2.25. Sestrojte pětiúhelník $ABCDE$, jsou-li dány délky jeho stran AB, CD a DE, velkosti úhlů ACB a AEB a odchylky přímek CD od AB a DE od AB. (Nepolohová, dvě posunutí, vektory jsou dány).



Obrázek 2.19: Konstrukce z příkladu 2.25

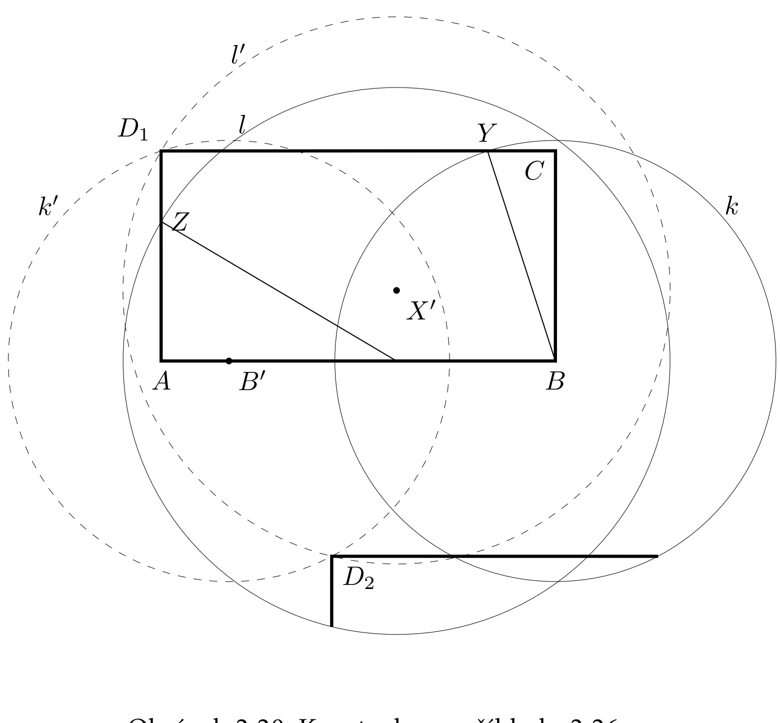
Řešení. Máme dánu stranu AB, pro vrchol C množinu bodů, na které leží (oblouk k – množinu všech bodů C, pro které má úhel ACB danou velikost) a pro vrchol E rovněž oblouk l daný úhlem AEB.

Dále můžeme uvážit posunutí, které je dáno vektorem CD a posunutí, které je dáno vektorem ED. Tato posunutí máme zadána, protože známe délky vektorů (délky stran CD a ED) i směry vektorů (odchylky přímek CD a DE od přímky AB).

Zobrazíme-li tedy v posunutí, které je dáno vektorem CD oblouk k, získáme množinu k', na které leží bod D. Zobrazíme-li dále v posunutí, které je dáno vektorem ED oblouk l, získáme množinu l', na které leží bod D. Bod D tedy leží v průniku množin k' a l'. Zbývající vrcholy nalezneme posunutím zpět.

V našem konkrétním případě jsou čtyři průsečíky D, pouze v jednom případě jde ale o mnohoúhelník, v ostatních případech je $ABCDEA$ lomená čára, která se protíná.

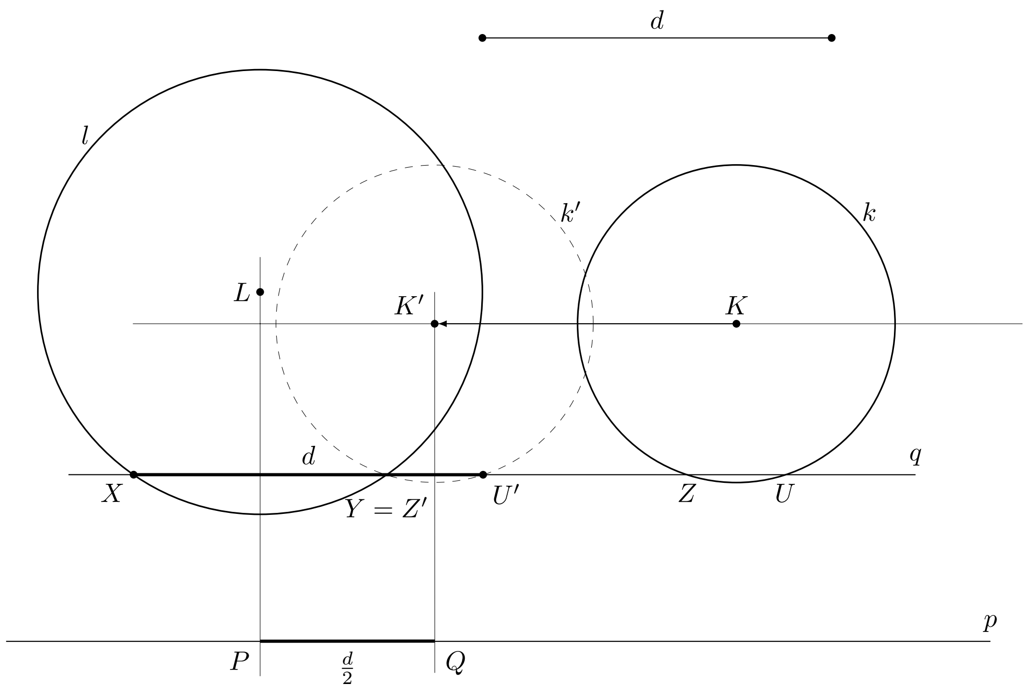
Příklad 2.26. Sestrojte obdélník $ABCD$, jestliže je dáno $|BX|$, kde X je bod strany AB, $|BY|$ a $|DY|$, kde Y je bod strany CD, $|DZ|$ a $|XZ|$, kde Z je bod strany AD obdélníku $ABCD$. (Nepolohová, dvě posunutí, vektory jsou dány).



Obrázek 2.20: Konstrukce z příkladu 2.26

Řešení. Úloha je obdobná jako úloha předchozí. Sestrojíme pětiúhelník $XBYDZ$ a pak mu „opíšeme“ obdélník. V tomto pětiúhelníku známe stranu XB, množinu bodů pro vrchol Y (kružnice k – délka strany BY), množinu bodů pro bod Z (kružnice l – délka strany XZ) a můžeme uvažovat posunutí, ve kterých je bod D obrazem nejdříve bodu Y – délka je dána délkou strany DY, směr je rovnoběžný s BX, a podruhé bodu Z – délka je dána délkou strany DZ a směr je kolmý na BX. Nalezneme bod D jako průsečík posunutých kružnic a posunutím zpět získáme body Y a Z. Nakonec narýsujeme obdélník. Úloha bude mít nejvýše dvě řešení, protože kružnice k' a l' mají nejvýše dva průsečíky. V našem konkrétním případě druhý bod D zjevně neurčuje obdélník.

Příklad 2.27. Jsou dány kružnice k a l, přímka p a úsečka délky d. Sestrojte přímku $q||p$ tak, aby součet délek tětiv, které q vytne v kružnicích k a l, byl roven d.



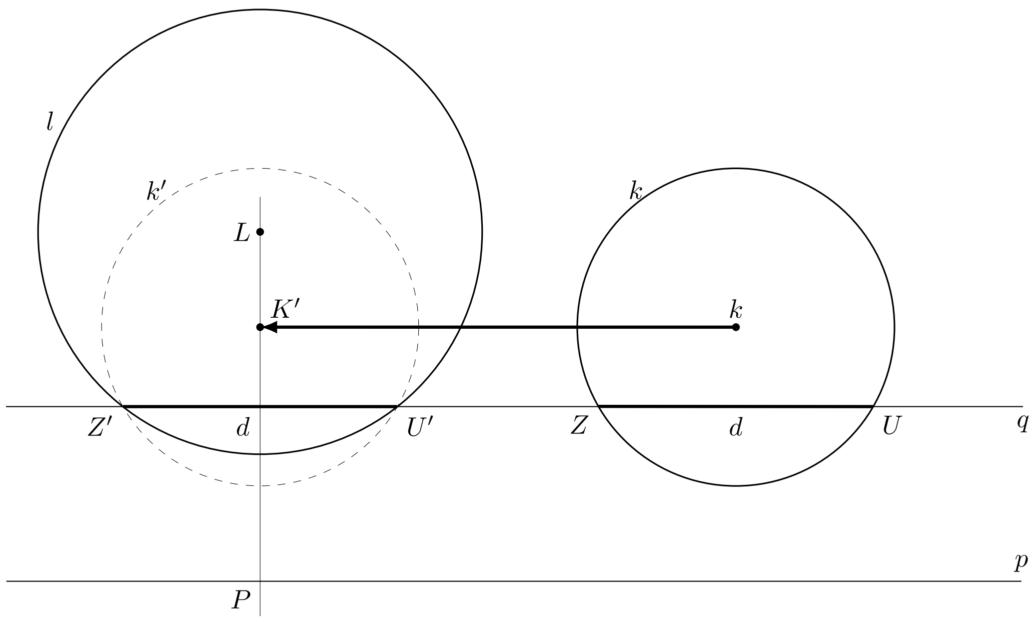
Obrázek 2.21: Konstrukce z příkladu 2.27

Řešení. Označme X, Y, Z a U průsečíky hledané přímky q s kružnicemi (podle obrázku). Uvažme posunutí, které je dáno vektorem rovnoběžným s přímkou p takové, že obraz bodu Z splyne s bodem Y. Pak má úsečka XU' délku právě d ($|XY|+$

$|ZU| = d$). Spustíme-li nyní kolmice ze středů kružnic l a k' k přímce p a označíme-li paty těchto kolmic P a Q, má úsečka PQ délku rovnu $\frac{1}{2}$.

Při konstrukci tedy spustíme k přímce p kolmici z bodu L, nalezneme na přímce p bod Q ve vzdálenosti $\frac{d}{2}$, vztyčíme z něj kolmici k přímce p a nalezneme střed posunuté kružnice k'. Průsečíkem kružnic k' a l pak vedeme přímku rovnoběžnou s přímkou p – to je hledaná přímka q.

Je nepodstatné, na kterou stranu od bodu P sestrojíme bod Q, přímka q bude tatáž. Jsou ale možná dvě řešení, protože kružnice k' a l mohou mít dva společné body.



Obrázek 2.22: Konstrukce z příkladu 2.29

Příklad 2.28. Jsou dány kružnice k a l, přímka p a úsečka délky d. Sestrojte přímku $q||p$ tak, aby rozdíl délek tětiv, které q vytne v kružnicích k a l, byl roven d.

Řešení. Úloha je analogická s předchozí úlohou, jen kružnici k posuneme tak, aby bod Y splynul s bodem U'.

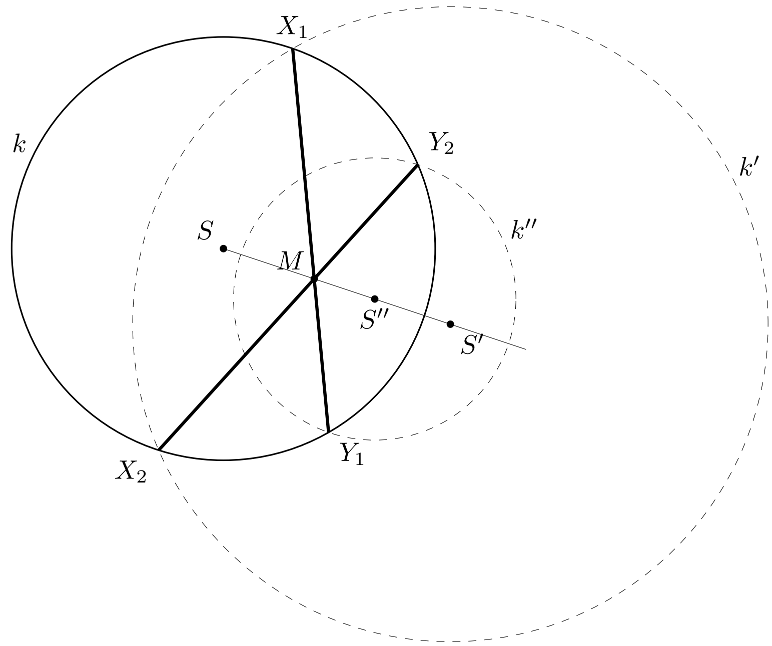
Příklad 2.29. Jsou dány kružnice k a l a přímka p. Sestrojte přímku $q||p$ tak, aby tětivy, které q vytne v kružnicích k a l, byly shodné.

Řešení. Úloha je obdobná jako dvě předchozí. Posuneme-li kružnici k tak, že její střed bude ležet na kolmici spuštěné z bodu L k přímce p, bude společná tětiva kružnic k' a l rovnoběžná s přímkou p. Hledaná přímka q pak obsahuje tuto tětivu. Úloha má řešení právě tehdy, když mají kružnice k' a l dva společné body.

3 Stejnolehlost

Příklad 3.1. Je dána kružnice k a její vnitřní bod M. Sestrojte tětivu XY kružnice k, kterou bod M dělí na úseky, jejichž délky jsou v poměru $2 : 3$. (Je dán střed i koeficient stejnolehlosti.)

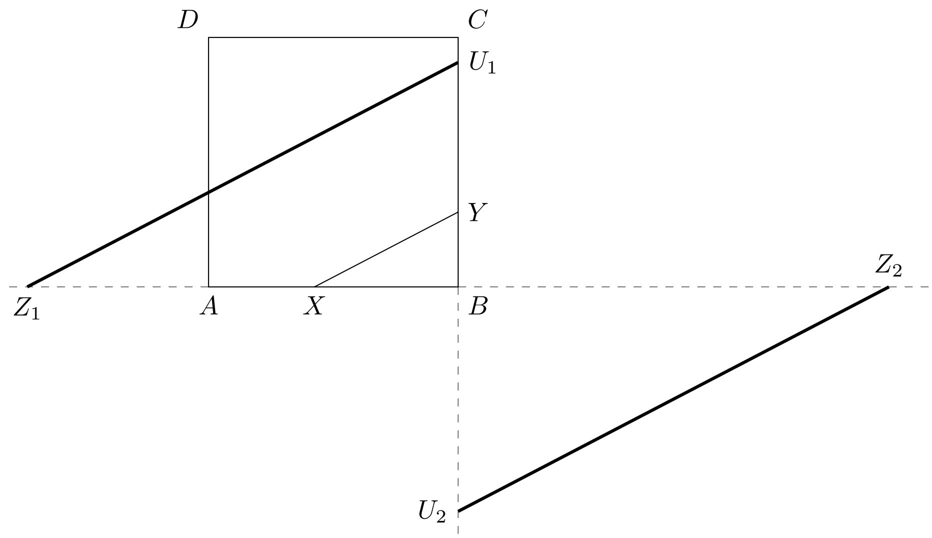
Řešení. Uvažujme stejnolehlost se středem M, ve které je bod X vzorem bodu Y. Koeficient této stejnolehlosti je dán poměrem délek úseků MX a MY. Zobrazíme-li tedy kružnici k (leží na ní bod X) v této stejnolehlosti, bude bod Y ležet na zobrazené kružnici k'. Protože má zároveň ležet na k, je bod Y průsečíkem kružnic k a k'. Jsou obecně až dvě řešení – můžeme uvažovat dvě stejnolehlosti, jednu s koeficientem $-\frac{2}{3}$ a druhou s koeficientem $-\frac{3}{2}$, ale řešení splývají.



Obrázek 3.1: Konstrukce z příkladu 3.1

Příklad 3.2. Je dán čtverec $ABCD$ a úsečka XY, kde X je bod strany AB a bod Y je bod strany BC. Nalezněte body Z a U tak, aby Z ležel na přímce AB, U ležel na přímce BC, úsečka ZU byla rovnoběžná s XY a aby $|ZU| = 3 \cdot |XY|$. (Je dán střed i koeficient stejnolehlosti.)

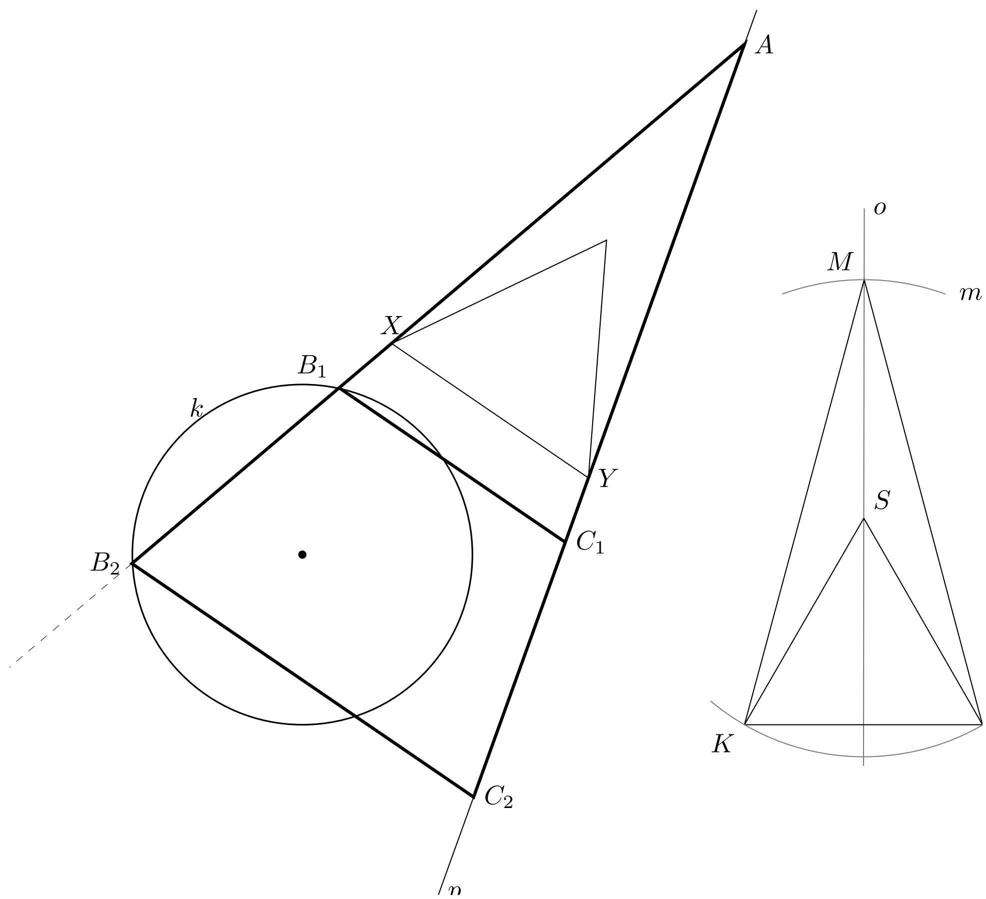
Řešení. Úsečky XY a ZU mají být rovnoběžné, proto existuje stejnolehlost, ve které je úsečka ZU obrazem úsečky XY. Koeficient se rovná 3 nebo -3. Středem této stejnolehlosti je zřejmě bod B. Zobrazíme proto úsečku XY v těchto stejnolehlostech. Úloha má právě dvě řešení.



Obrázek 3.2: Konstrukce z příkladu 3.2

Příklad 3.3. Je dán bod A, kružnice k a přímka p, která prochází bodem A. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC s hlavním vrcholem A tak, aby bod B ležel na kružnici k a bod C na přímce p a aby poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC se rovnal délce strany BC. (Je dán pouze střed stejnolehlosti, koeficient je neznámý, ale daný.)

Řešení. Uvažujme trojúhelník AXY, jehož vrchol Y leží na p a který má poloměr kružnice opsané roven délce strany XY. Trojúhelník ABC je s trojúhelníkem AXY stejnolehlý se středem stejnolehlosti v bodě A a s koeficientem $k = |BC| : |XY|$. Sestrojme proto nějaký trojúhelník AXY – sestrojíme nejdříve libovolně v rovině rovnostranný trojúhelník KLS, osu o strany KL a kružnici $m(S, |KL|)$, pak průsečík M kružnice m a osy o bude poslední vrchol trojúhelníku KLM shodného s pomocným trojúhelníkem AXY. Přeneseme tedy trojúhelník KLM na přímku p tak, aby M splynul s A a L ležel na přímce p. Bod B pak najdeme jako průsečík přímky AK s kružnicí k – bod B je tak obrazem bodu K v uvažované stejnolehlosti, vrchol C pak najdeme pomocí rovnoběžky s úsečkou KL vedenou bodem B. Přímka AX může mít s kružnicí k dva průsečíky. Dále je třeba uvažovat čtyři možná umístění trojúhelníku AXY na



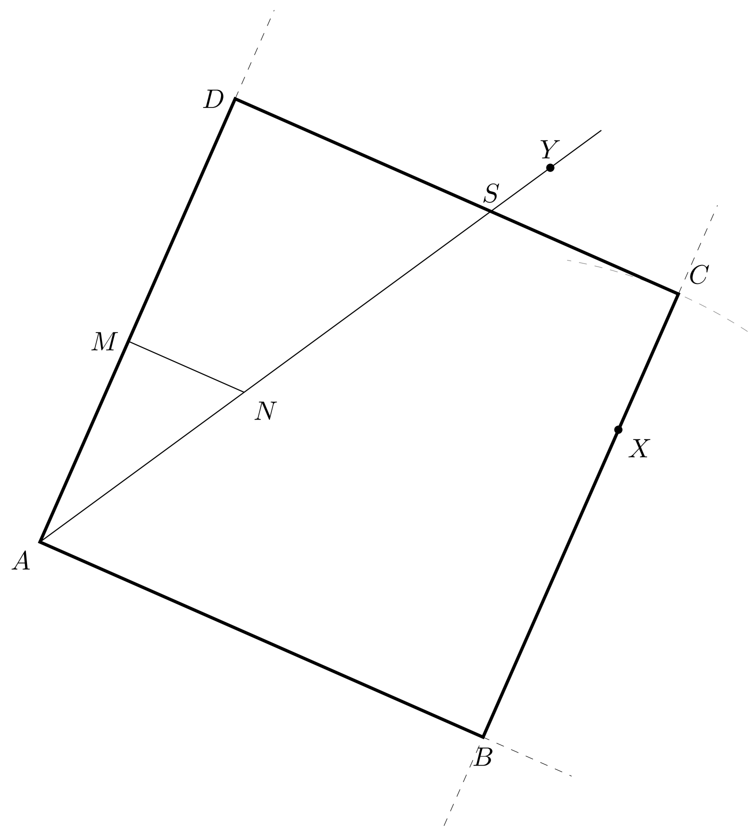
Obrázek 3.3: Konstrukce z příkladu 3.3

přímku p, získáme tak dvě možné přímky AX (vždy dvě a dvě splývají), proto mohou být až čtyři řešení úlohy.

Příklad 3.4. Jsou dány body A, X a Y. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby střed strany CD ležel na přímce AY a X ležel na straně BC. (Je dán pouze střed stejnolehlosti.)

Řešení. Označme S střed strany CD. Trojúhelník ADS je pravoúhlý a jeho odvěsny mají délky v poměru $2:1$. Uvažujme libovolný pravoúhlý trojúhelník AMN, kde M leží na úsečce AD a který má odvěsny v tomto poměru. Uvažujeme-li pak čtverec $AMOP$, kde N je střed MO, máme čtverec stejnolehlý se čtvercem $ABCD$ podle středu A. Stačí tedy bodem X vést rovnoběžku s přímkou AM – na této přímce leží strana BC. Čtverec pak dokončíme pomocí kolmic. Existují dvě možné přímky AM, proto jsou možná až dvě řešení. Konstrukcí je zabezpečeno, že bod X leží na přímce

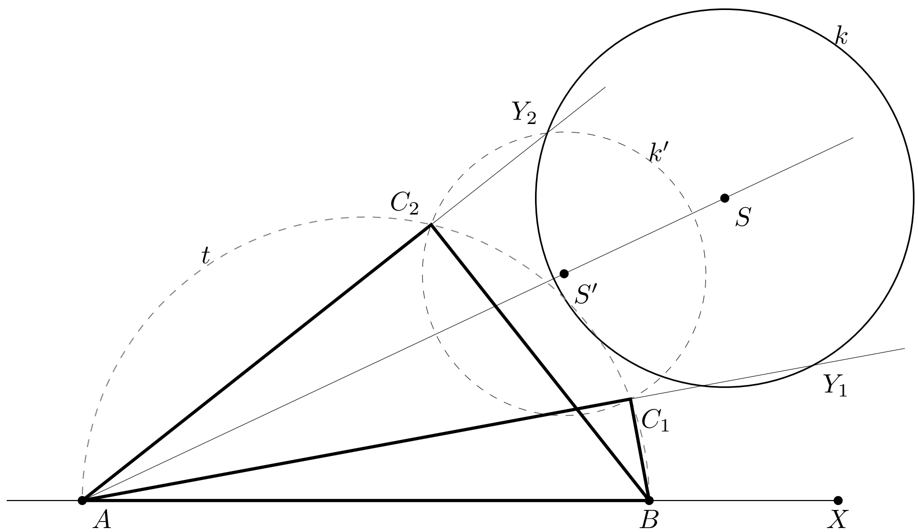
BC, na jeho poloze ovšem závisí, zda bude ležet na straně BC.



Obrázek 3.4: Konstrukce z příkladu 3.4

Příklad 3.5. Je dána úsečka BX a kružnice k. Nalezněte na kružnici k bod Y a sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C tak, aby bod A ležel na přímce BX, bod C ležel na přímce AY a aby platilo, že $BC||XY$ a $|BC| = \frac{3}{4}|XY|$. (Je dán pouze koeficient, střed je třeba najít.)

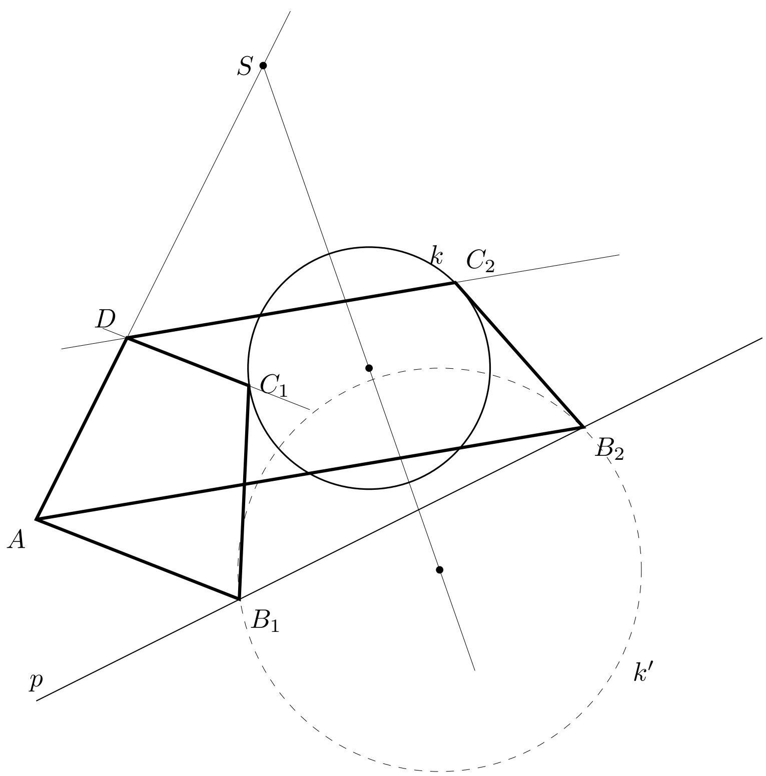
Řešení. Uvažujme trojúhelník AXY. Body B a C pak leží na jeho stranách AX a AY a trojúhelníky AXY a ABC jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti ve vrcholu A s koeficientem $\frac{3}{4}$. Nalezneme proto bod A na přímce BX tak, aby $|AB| = \frac{3}{4}|AX|$. Pak zobrazíme kružnici k v uvažované stejnolehlosti – získáme kružnici k'. Vrchol C najdeme jako průsečík kružnice k' a Thaletovy kružnice nad průměrem AB. Bod Y pak najdeme jako průsečík přímky AC s kružnicí k. Počet řešení závisí na počtu společných bodů kružnice k' a Thaletovy kružnice nad AB. Dále je třeba uvažovat i stejnolehlost se záporným koeficientem, v ní by bod A ležel na úsečce BX. Pro oba koeficienty jsou možná dvě řešení.



Obrázek 3.5: Konstrukce z příkladu 3.5

Příklad 3.6. Je dána kružnice k, přímka p a úsečka AD. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, $AB||CD$, jestliže $|AB| : |CD| = 5 : 3$, tak, aby bod B ležel na p a bod C na k. (Je dán pouze koeficient stejnolehlosti, střed je třeba najít.)

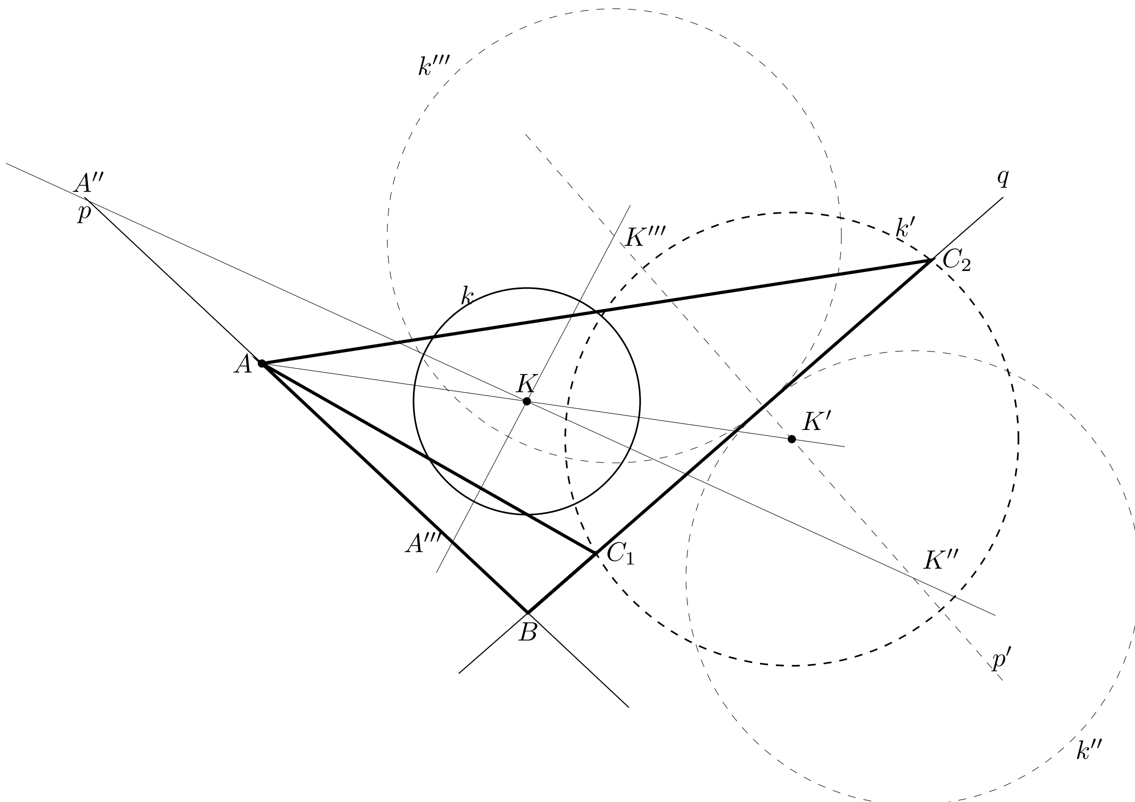
Řešení. Uvažujme bod S – průsečík přímek AD a BC. Bod S je střed stejnolehlosti s koeficientem $\frac{5}{3}$, ve které je úsečka AB obrazem úsečky CD. Vrchol C je tedy vzorem vrcholu B. Nalezneme tedy na přímce AD bod S a zobrazíme kružnici k v této stejnolehlosti. Pak najdeme průsečík získané kružnice k' s přímkou p. Tento průsečík je vrchol B, vrchol C pak najdeme jako (odpovídající) průsečík přímky BS s kružnicí k. Když bychom uvažovali koeficient stejnolehlosti $\frac{-5}{3}$, dostali bychom uvedenou konstrukcí uzavřenou lomenou čáru, která se protíná – nikoli lichoběžník. Jsou tedy možná dvě řešení.



Obrázek 3.6: Konstrukce z příkladu 3.6

Příklad 3.7. Jsou dány různoběžné přímky p a q s průsečíkem B a kružnice k. Sestrojte trojúhelník ABC pro který platí, že A leží na p, C leží na q a S, střed strany AC, leží na k. (Je dán pouze koeficient stejnolehlosti.)

Řešení. V trojúhelníku ABC platí, že A je střed stejnolehlosti s koeficientem 2, ve kterém je bod S vzorem bodu C. Zvolíme-li tedy libovolně bod A na přímce p, můžeme kružnici k zobrazit v této stejnolehlosti a průsečíky zobrazené kružnice k' s přímkou q jsou body C. Pro každou volbu bodu A mohou existovat dva body C. Je tedy třeba diskutovat, pro které volby bodu A nějaká řešení existují a pro které nikoli. Na obrázku jsou nakresleny kružnice k'' a k''', které mají středy na přímce p' a poloměr roven dvojnásobku poloměru kružnice k. Přímka p' – obraz přímky p ve stejnolehlosti s koeficientem – 1 a středem v bodě K – středu kružnice k (resp. ve středové souměrnosti se středem K) – je množina všech středů kružnic k'. Je to tak proto, že bod K' jsme získali jako obraz bodu K ve stejnolehlosti s koeficientem 2 se středem v A. Jde o kružnice, které se dotýkají přímky q, proto jsou jejich středy K'' a K''' obrazy krajních body úsečky, jejíž body jsou všechny možné body A hledaných trojúhelníků ABC.

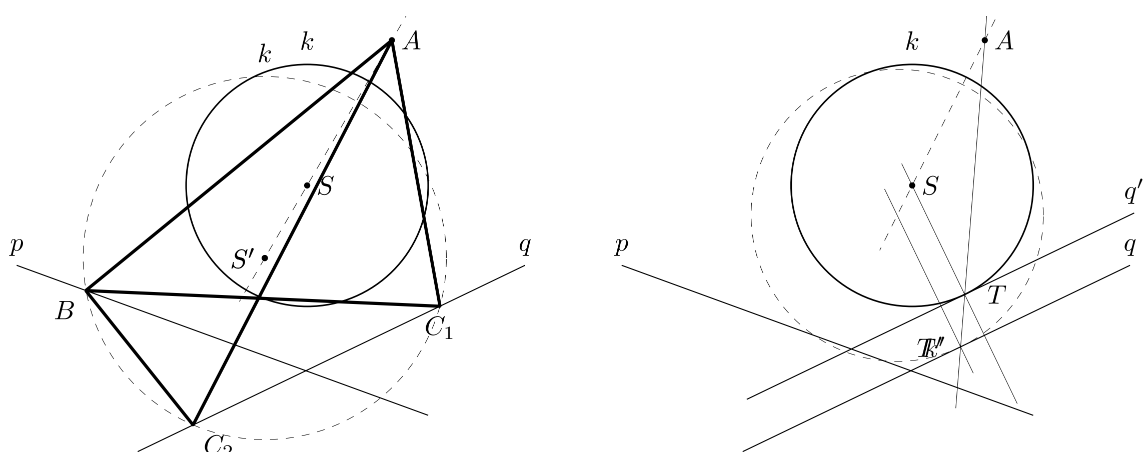


Obrázek 3.7: Konstrukce z příkladu 3.7

Příklad 3.8. Je dán bod A, kružnice k a přímky p a q. Sestrojte trojúhelník ABC, kde B leží na p, C leží na q a $BC||XY$, kde X je průsečík strany AB s k a Y je průsečík strany AC s k. (Je dán pouze střed stejnolehlosti.)

Řešení. V trojúhelníku ABC platí, že vrchol A je středem stejnolehlosti, ve které je úsečka XY vzorem úsečky BC. Zobrazíme-li tedy kružnici k ve stejnolehlosti se středem v A s libovolným koeficientem větším než 1 (úsečka XY má ležet uvnitř trojúhelníku ABC), získáme vrchol B jako průsečík k' s p a vrchol C jako průsečík k' s q. Kružnice k' může mít dva společné body s přímkou p a dva společné body s přímkou q. Počet řešení závisí na volbě koeficientu stejnolehlosti. Jestliže nebude mít kružnice k' s některou z přímek p a q žádný společný bod, úloha nebude mít řešení. Nejmenší koeficient je takový, pro který se bude kružnice k' dotýkat jedné z přímek p a q a s druhou z nich bude mít dva společné body.

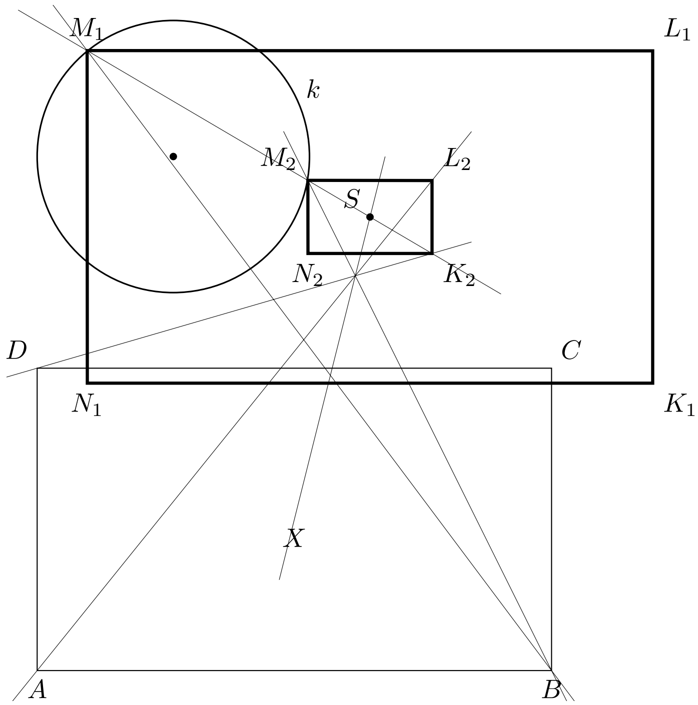
Nalezení této kružnice k' je samostatná úloha využívající stejnolehlost. Máme najít kružnici k', která je s kružnicí k stejnolehlá podle středu A a která se dotýká přímky q. Sestrojíme-li tečnu kružnice k, která je rovnoběžná s přímkou q a označíme-li bod dotyku T, pak průsečík T' přímky AT s přímkou q je bodem dotyku kružnice k' s přímkou q. Krajní koeficient stejnolehlosti je tedy koeficient, který je dán podílem poloměrů kružnic k' a k (navíc – kružnice k' musí mít větší poloměr než k).



Obrázek 3.8: Konstrukce z příkladu 3.8

Příklad 3.9. Je dán obdélník $ABCD$, bod S a kružnice k. Sestrojte obdélník $LMNK$ podobný s obdélníkem $ABCD$ (podle pořadí vrcholů) pro který platí, že M leží na kružnici k, $LM||AB$ a S je průsečík úhlopříček obdélníku $KLMN$. (Střed i koeficient je třeba najít.)

Řešení. Označme X průsečík úhlopříček obdélníku $ABCD$. Protože mají být obdélníky $ABCD$ a $KLMN$ podobné a s rovnoběžnými stranami, existuje stejnolehlost, ve které je jeden obrazem druhého. Střed této stejnolehlosti musí ležet na přímce XS. Dále musí platit, že obrazem úhlopříčky např. BD je úsečka s BD rovnoběžná procházející bodem X. Sestrojme proto bodem S přímku p rovnoběžnou s přímkou BD a nalezněme průsečík přímky p s kružnicí k. Tento průsečík je obraz jednoho



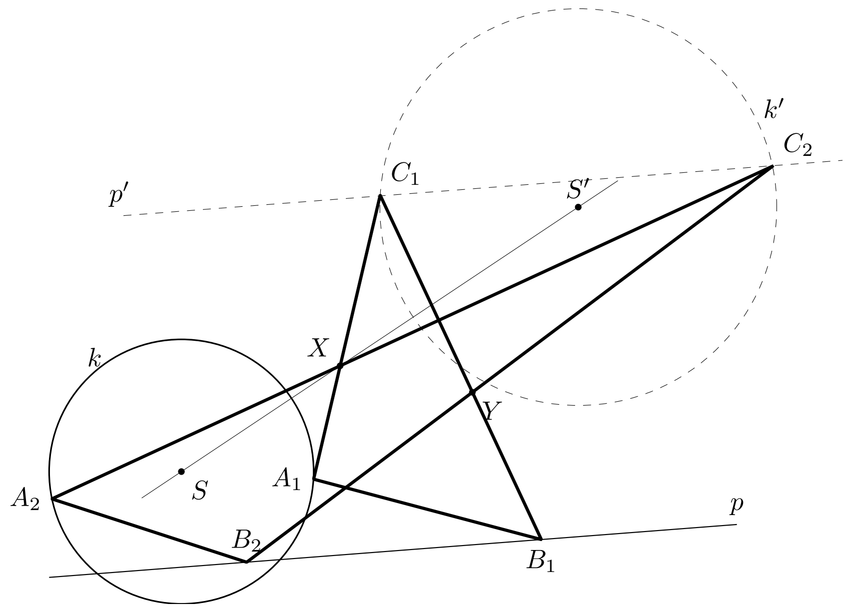
Obrázek 3.9: Konstrukce z příkladu 3.9

z vrcholů B nebo D – uvažujme dále, že bodu B – a je to tedy bod M. Průsečík přímek XS a BM je střed uvažované stejnolehlosti. Pomocí tohoto středu sestrojíme zbývající vrcholy obdélníku $KLMN$.

Pro případ, že bod B je vzorem bodu M mohou být dvě řešení – přímka p může mít dva průsečíky s kružnicí k. Budeme-li pracovat s bodem D, získáme tatáž řešení.

Příklad 3.10. Je dána kružnice k, přímka p a body X a Y. Sestrojte trojúhelník ABC, jestliže bod X dělí stranu AC v poměru $2:3$, AX je kratší úsek, bod Y dělí stranu BC v poměru $3:4$, BY je kratší úsek, bod A leží na kružnici k a bod B leží na přímce p. (Dvě stejnolehlosti, středy i koeficienty jsou dány.)

Řešení. Bod C je obrazem bodu A ve stejnolehlosti se středem v bodě X a s koeficientem $-\frac{3}{2}$, proto leží na kružnici k', která je obrazem kružnice k v této stejnolehlosti. Bod C je zároveň obrazem bodu B ve stejnolehlosti s koeficientem $-\frac{4}{3}$, leží proto na přímce p', která je obrazem přímky p v této stejnolehlosti. Bod C je průsečíkem přímky p' s kružnicí k', zbývající vrcholy nalezneme pomocí přímek CX a CY a jejich průsečíků s kružnicí k a přímkou p. Počet řešení závisí na počtu průsečíků přímky p' a kružnice k'.

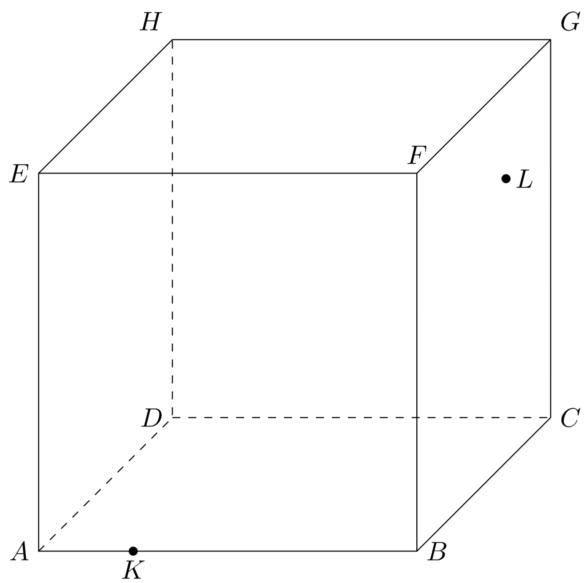


Obrázek 3.10: Konstrukce z příkladu 3.10

4 Sítě těles

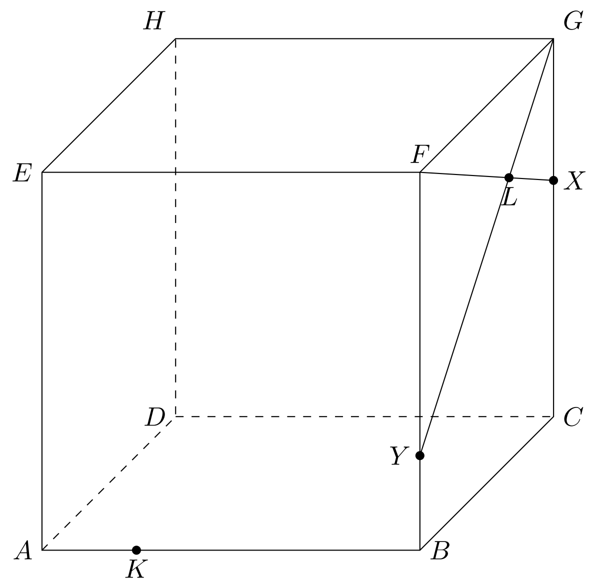
Sítí rozumíme rozvinutí povrchu tělesa do roviny (je-li to možné!). Uvědomme si, že některá tělesa nelze do roviny rozvinout, např. kouli. Práce se sítí tělesa je zajímavá a propojuje geometrické dovednosti například s výtvarnou výchovou, budeme-li lepit modely. Tento text se však zaměří na jiný problém – nejkratší vzdálenost měřenou po povrchu tělesa. Ukažme si typické příklady.

Příklad 4.1. Je dána krychle $ABCDEFGH$ a dva body K, L. K leží na hraně AB, L leží ve stěně $BCGF$. Určete nejkratší dráhu z bodu K do bodu L po povrchu krychle.

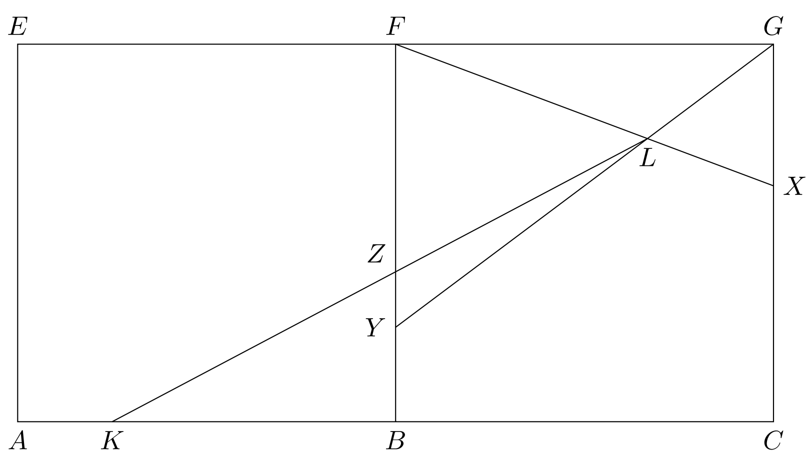


Řešení. Použijeme část sítě krychle, zřejmě bude stačit přední a pravá boční stěna. V rozvinutí též vyznačíme body K, L. K přenesení bodu L použijeme úsečky FX a GY. Ty totiž snadno přeneseme do sítě, neboť BY a CX vidíme ve skutečné velikosti. V rovině je nejkratší vzdálenost dvou bodů úsečka jimi určená. Ta protne hranu BF v bodě, který je označen Z. BZ můžeme opět přenést do průmětu krychle a máme hledanou lomenou čáru.

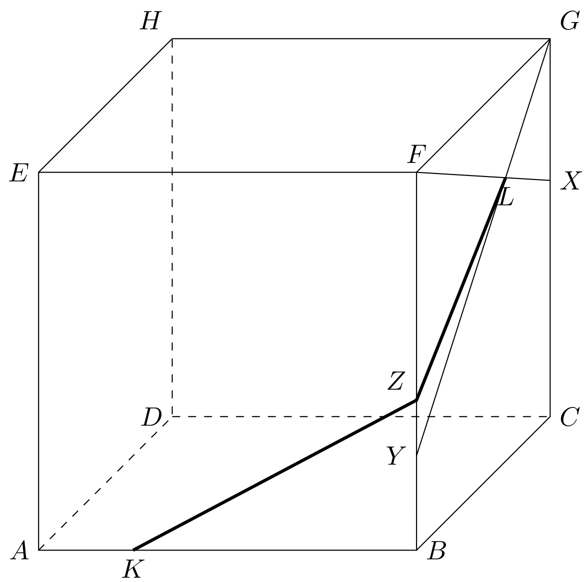
Tento příklad ukázal základní myšlenku těchto úloh. Na druhou stranu se jedná o nejjednodušší možný a lze si snadno představit, že pokud výsledná lomená čára protne více stěn tělesa, nemusí být ze začátku vůbec jasné, které stěny to jsou a také jakou síť tělesa použít.



Obrázek 4.1: Pomocné úsečky FX a GY.



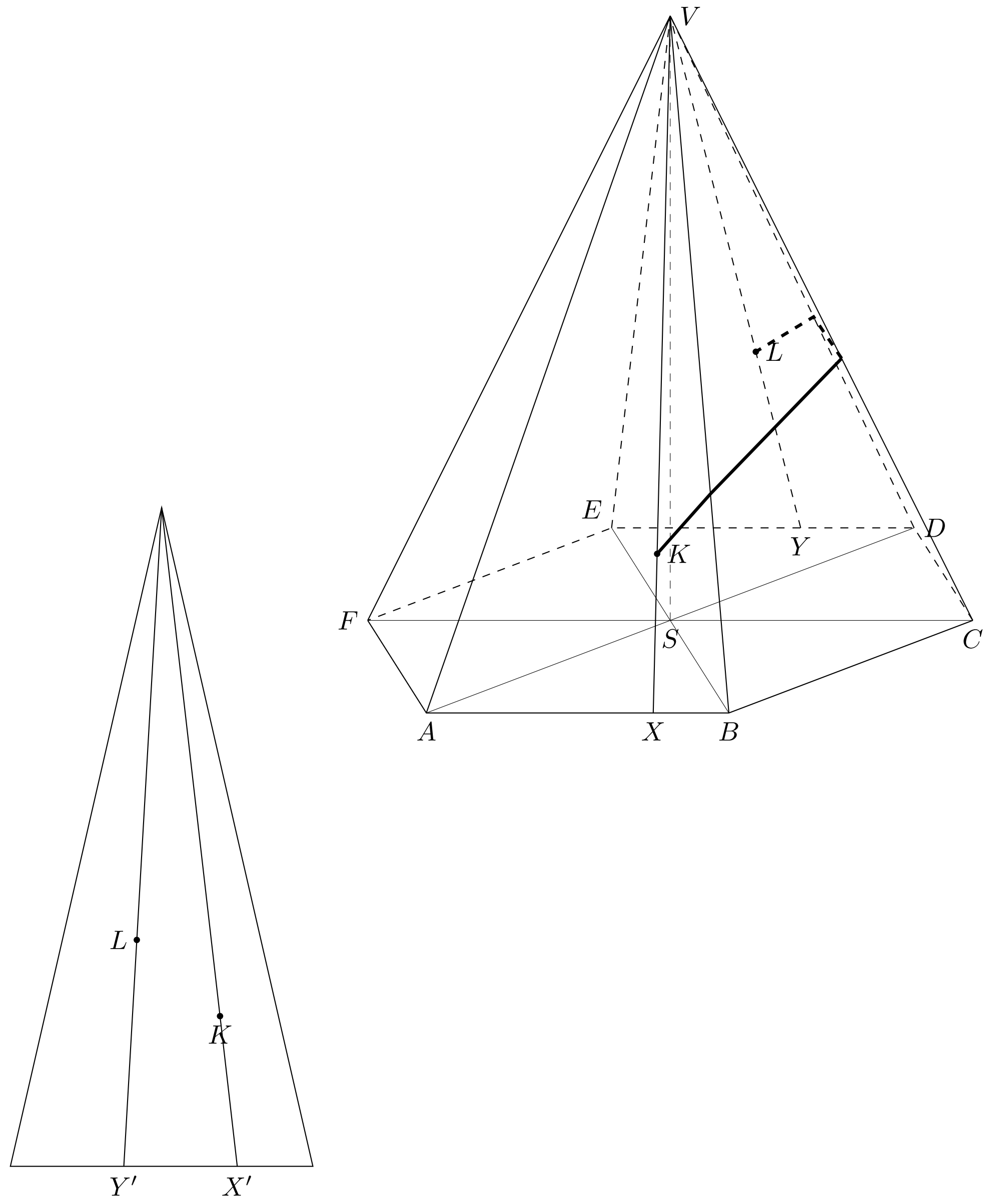
Obrázek 4.2: Část sítě, vyznačen bod Z.



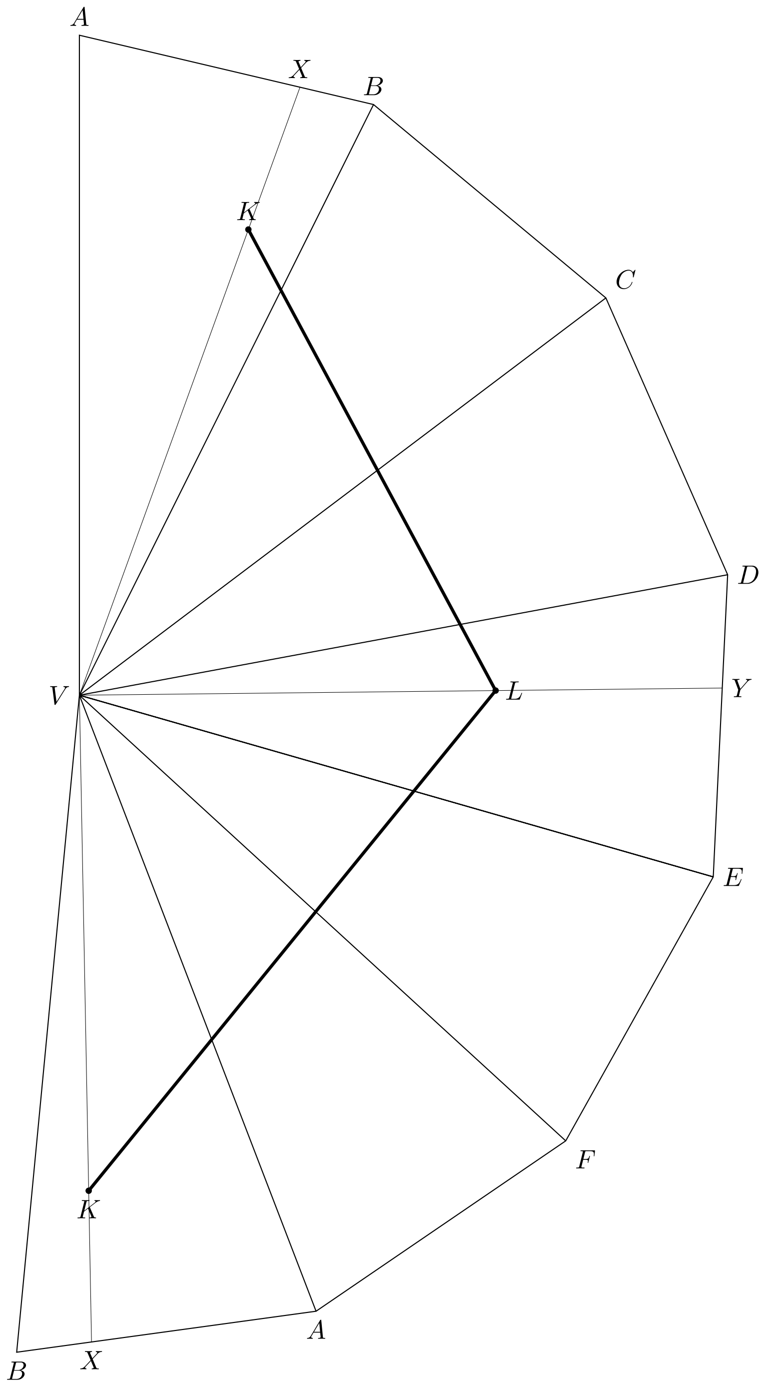
Obrázek 4.3: Výsledná lomená čára.

Příklad 4.2. Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$ a na jeho plášti body K, L. Platí: $|AB| = 4\,\mathrm{cm}$, $v = 8\,\mathrm{cm}$, $X \in AB$, $|AX| = 3\,\mathrm{cm}$, $K \in XV$, $|XK| = 2\,\mathrm{cm}$, $Y \in DE$, $|DY| = 1,5\,\mathrm{cm}$, $L \in YV$, $|VL| = 3\,\mathrm{cm}$. Určete nejkratší spojnici bodů K, L ležící na plášti jehlanu.

Řešení. Ve volném rovnoběžném promítání zobrazíme pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$. Zvolíme-li hranu AB rovnoběžně s průmětnou, můžeme snadno určit průměty bodů X, Y. Pro vynesení bodů K, L užijeme podobných trojúhelníků (první možný problém pro studenty). Sestrojíme síť pláště jehlanu. Otázka ovšem je, zda hledaná lomená čára půjde přes stěnu BCV nebo FAV? Nejjednodušší bude zkusit obě varianty. (Někdy je to vidět ze zadání, jindy je komplikované to zdůvodnit. Proto tento experimentální přístup.) V rozvinutí tedy zobrazíme stěnu DEV dvakrát a porovnáme obě možnosti. Při zpětném odvození průsečíků lomené čáry na hrany jehlanu opět užijeme podobnosti trojúhelníků (tedy úlohu o dělení úsečky v daném poměru).



Obrázek 4.4: Průmět jehlanu ve volném rovnoběžném promítání

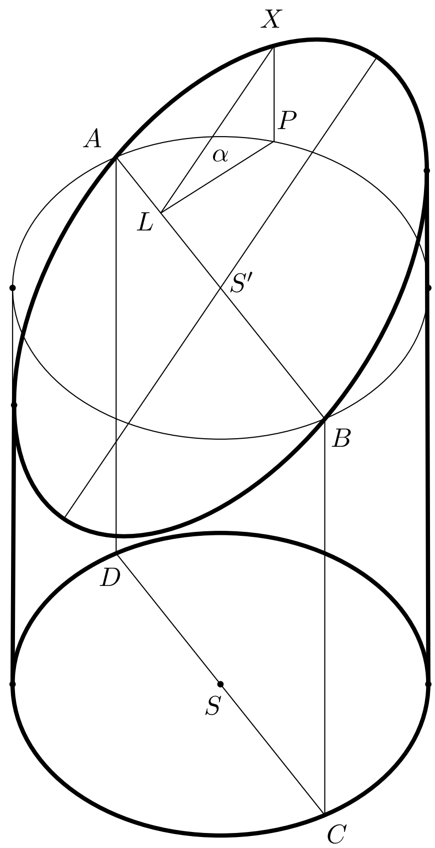


Obrázek 4.5: Síť pláště jehlanu

Podívejme se nyní alespoň na jeden příklad týkající se oblých těles.

Příklad 4.3. Uvažujme rotační válec o poloměru 1 a na něm eliptický řez. Do jaké křivky se rozvine tento řez při rozvinutí pláště válce do roviny?

Řešení. Náčrt situace[1]



Obrázek 4.6: Situace z příkladu 4.3

Plášť rotačního válce s poloměrem jedna, jehož dolní podstava má střed S a horní S', je obdélník $A'A''D''D'$, přičemž $|D'D''| = 2\pi$. Libovolný bod X elipsy řezu přejde v rozvinutí do bodu X' tak, že délka úsečky $A'P'$ je rovna délce kruhového oblouku AP, označme ji x. Délka úsečky $X'P'$ je rovna délce úsečky XP a tu určíme z pravoúhlého

[1]Jde skutečně pouze o přibližný obrázek, který neřeší viditelnost a navíc to není volné rovnoběžné promítání, ale volná axonometrie. (autor si toho je vědom)

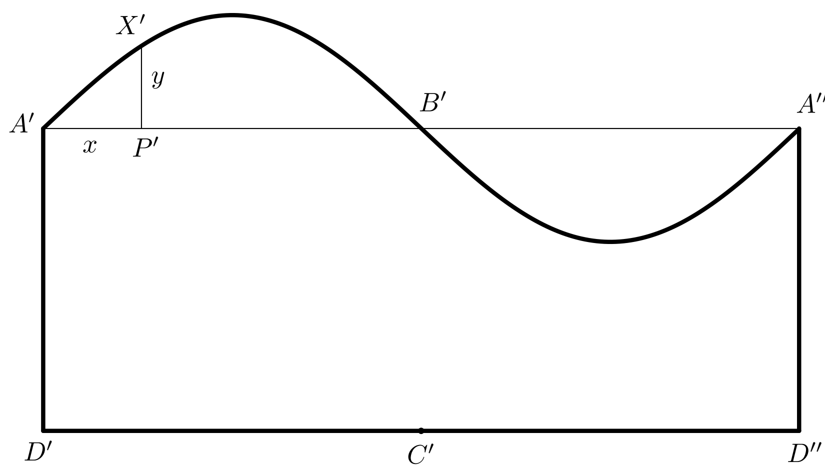
trojúhelníku LPX.

$$y = |LP| \cdot \operatorname{tg} \alpha \qquad |LP| = \sin x$$

Tedy celkem

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin x\,.$$

Protože $\operatorname{tg} \alpha$ je pro daný řez konstantní probíhá bod X po sinusoidě.



Obrázek 4.7: Síť seříznutého válce

Poznamenejme, že v případě obecného poloměru r válce, dostaneme graf funkce $\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \frac{x}{r}$, kde $\operatorname{tg} \alpha$ je konstanta daná rovinou řezu.

5 Kruhová inverze

Möbiova rovina je euklidovská rovina doplněná o právě jeden nevlastní bod M^∞, kterému říkáme Möbiův bod. Tímto bodem neprochází žádná kružnice a naopak jím prochází každá přímka roviny. V takto doplněné rovině můžeme dobře definovat zobrazení, které se nazývá kruhová inverze.

Mějme Möbiovu rovinu a v ní kružnici $i(S, r)$. Kruhovou inverzí vzhledem ke kružnici i rozumíme následující zobrazení:

1. Obrazem středu S kružnice i je bod M^∞.
2. Obrazem bodu M^∞ je střed S kružnice i.
3. Obrazem libovolného bodu $X \neq S$ a $X \neq M^\infty$ je bod X' ležící na polopřímce SX tak, že platí

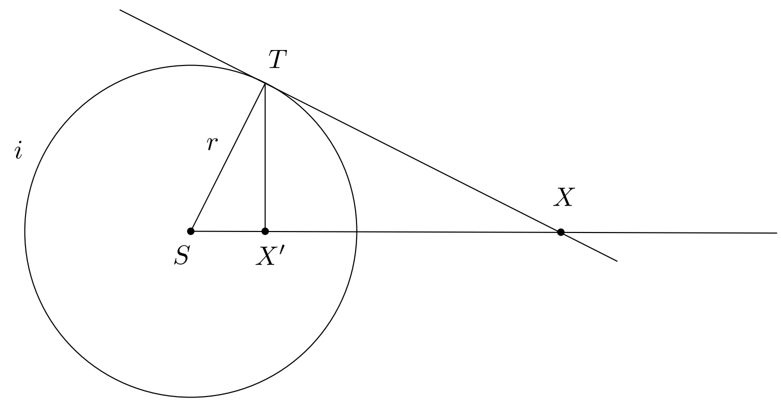
$$|SX| \cdot |SX'| = r^2 \, .$$

Poznamenejme, že

- je-li bod X' obrazem bodu X, pak je i bod X obrazem bodu X',
- body na kružnici i jsou samodružné,
- bod ležící uvnitř kružnice i se zobrazí na její vnější bod a naopak.

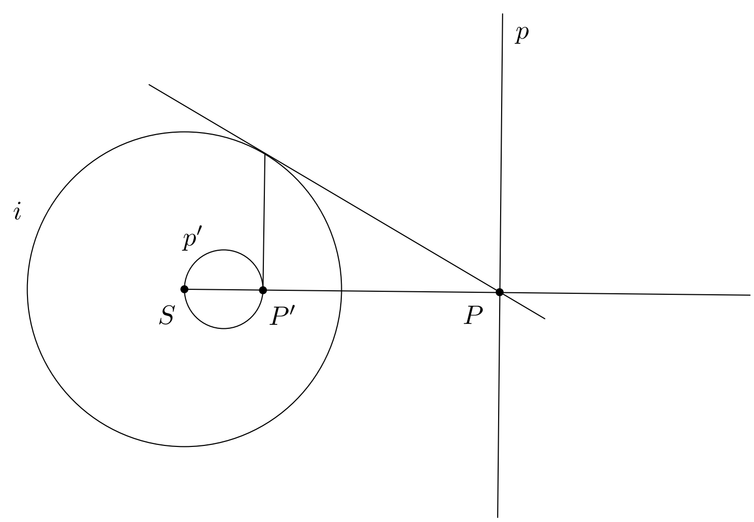
Konstrukce obrazu X' libovolného bodu $X \neq S$, $X \neq M^\infty$ a $X \notin i$ je založena na Euklidově větě o odvěsně. Tato konstrukce je znázorněna na následujícím obrázku pro bod X, ležící vně kružnice i.

Z bodu X sestrojíme tečnu kružnice i, bod dotyku popíšeme T. Z bodu T spustíme kolmici na přímku XS, pata této kolmice je hledaný obraz X'. Konstrukci lze použít též v opačném pořadí pro konstrukci obrazu bodu ležícího uvnitř kružnice i.



Obrázek 5.1: Konstrukce obrazu bodu X

Nyní si rozmysleme, jak budou vypadat obrazy přímek v kruhové inverzi. Protože každá přímka prochází bodem M^{∞}, musí obraz každé přímky procházet bodem S.



Obrázek 5.2: Obraz přímky p v kruhové inverzi

- Přímka procházející bodem S se zobrazí sama na sebe.
- Sečna kružnice i ($S \notin i$) se zobrazí na kružnici určenou bodem S a průsečíky

s kružnicí i.

- Tečna kružnice i se zobrazí na kružnici sestrojenou nad průměrem ST, kde T je její bod dotyku.

- Vnější přímka se zobrazí na kružnici uvnitř kružnice i, kterou nejsnáze určíme jako Thaletovu kružnici nad SP', kde P je pata kolmice spuštěné z S na zobrazovanou přímku.

Podobně si rozeberme, jak vypadá obraz kružnice k.

- $S \in k$, k leží uvnitř i. Obrazem je přímka, jejíž konstrukce je zřejmá z předešlého obrázku.

- $S \in k$, k má vnitřní dotyk s i. Obrazem je tečna kružnice i.

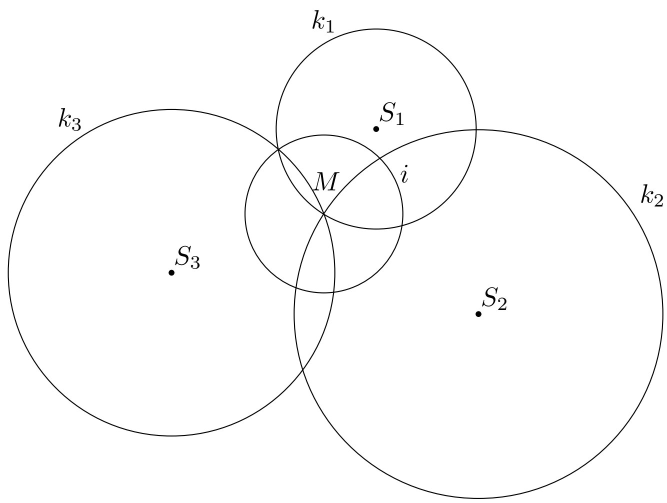
- $S \in k$, k protíná i ve dvou bodech. Obrazem je sečna určená právě průsečíky kružnic k a i.

- Obrazem kružnice, která neprochází středem je opět kružnice.

K typickým úlohám na kruhovou inverzi patří Apolloniovy úlohy, tj. úlohy na sestrojení kružnice, která je určena třemi podmínkami. Podmínkou se rozumí bod, přímka či kružnice. Tyto úlohy lze najít v různých textech, proto zde uvedeme jen jednu z nich.

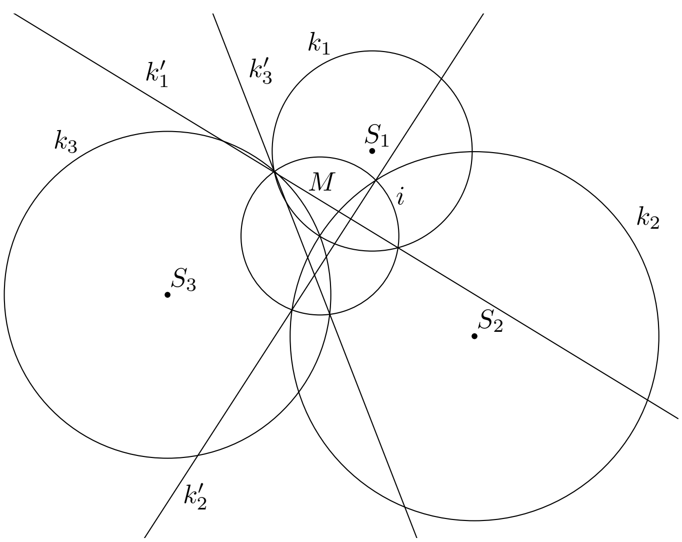
Příklad 5.1. Jsou dány kružnice k_1, k_2, k_3 procházející jedním bodem M. Sestrojte kružnici l, která se dotýká tří zadaných kružnic.

Řešení. Zvolme kružnici $i(M, r)$.



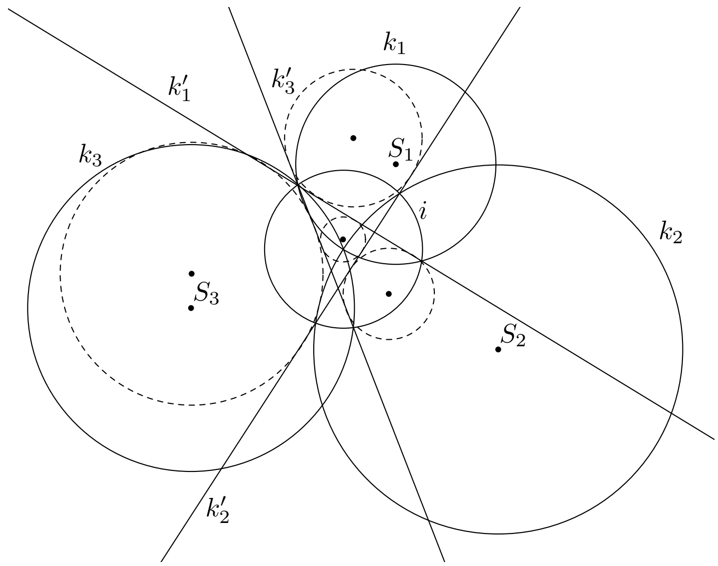
Obrázek 5.3: Situace z příkladu 5.1

Zobrazme kružnice k_1, k_2, k_3 v kruhové inverzi vzhledem ke kružnici i.



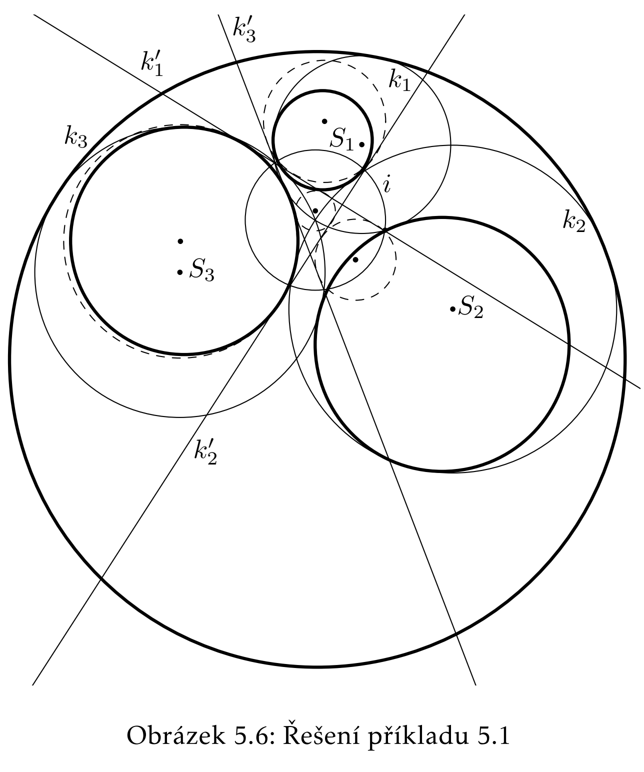
Obrázek 5.4: Zobrazení kružnic k_1, k_2 a k_3 v kruhové inverzi

Obrazy kružnic k_1, k_2, k_3 jsou přímky. Stačí tedy sestrojit kružnice, které se dotýkají daných přímek. Tedy kružnici vepsanou a připsané trojúhelníku (v obrázku čárkovaně).



Obrázek 5.5: Sestrojení kružnice

Nakonec použijeme znovu kruhovou inverzi dostaneme hledaná řešení.

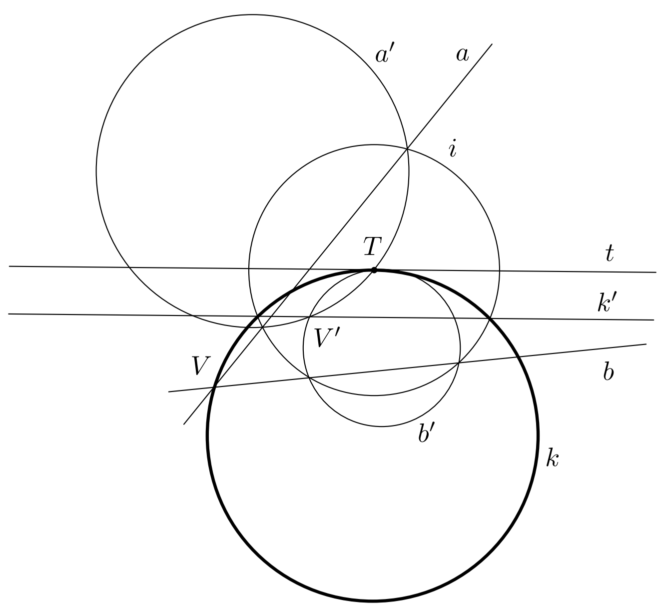


Obrázek 5.6: Řešení příkladu 5.1

Ještě poznamenejme, že diskusi Apollóniovy úlohy lze najít např. na http://is.muni.cz/th/150476/prif_b/Bakalarska_prace.pdf. Mnohem zajímavější (alespoň podle mého soudu) jsou úlohy s nepřístupnými průsečíky. Uveďme na ukázku dvě takové.

Příklad 5.2. Sestrojte kružnici k, která se dotýká přímky t v bodě T a prochází nepřístupným bodem V, což je průsečík různoběžek a, b.

Řešení. Uvažujme kruhovou inverzi vzhledem ke kružnici $i(T, r)$. Přímky a, b přejdou do kružnic a', b', které se (kromě T) protnou v bodě V'. Obrazem hledané kružnice k je přímka k', která prochází bodem V' a je rovnoběžná s přímkou t. (V obrázku je zobrazen i bod V, ale nijak se ke konstrukci nepoužívá.)

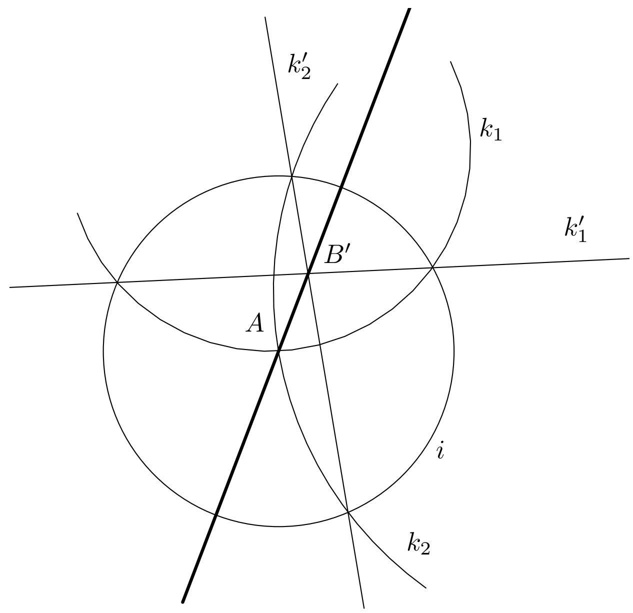


Obrázek 5.7: Konstrukce z příkladu 5.2

Příklad 5.3. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 protínající se ve dvou bodech. Sestrojte jejich společnou tětivu, jestliže jejich středy jsou nepřístupné a je přístupný jen jeden jejich průsečík.

Řešení. Uvažujme kruhovou inverzi vzhledem ke kružnici $i(A, r)$. Kružnice k_1, k_2

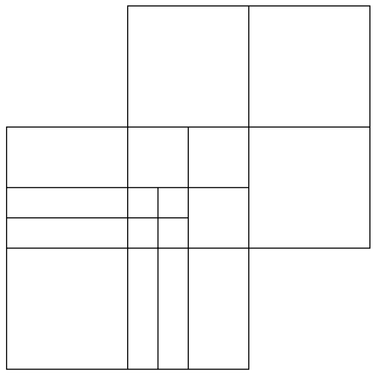
přejdou do přímek k_1', k_2', které se protnou v bodě B'. Protože body A, B, B' leží na jedné přímce, AB' je hledaná tětiva.

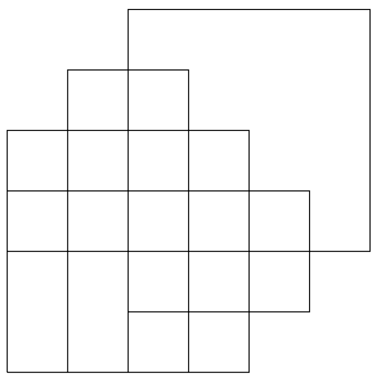


Obrázek 5.8: Konstrukce z příkladu 5.3

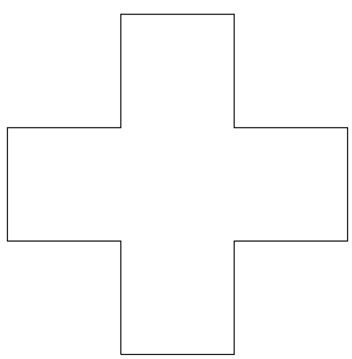
6 Pracovní listy

Příklad 6.1. Kolik čtverců je na obrázku?

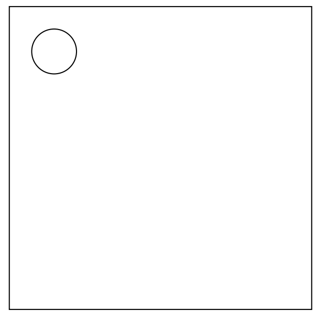




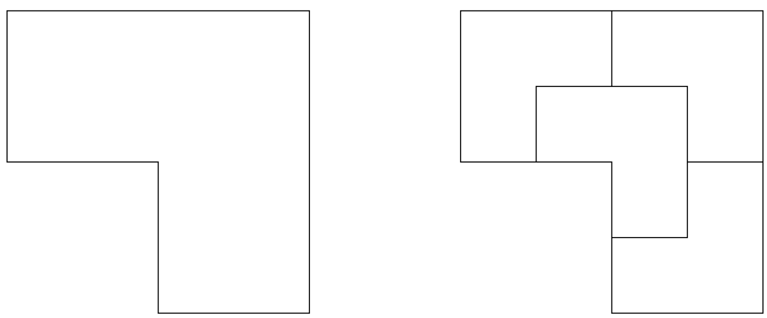
Příklad 6.2. Nákres na obrázku rozdělte na čtyři díly a z nich sestavte čtverec.

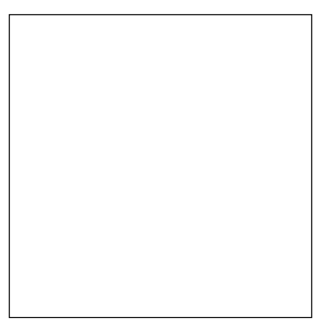


Příklad 6.3. Rozdělte čtverec s kroužkem v rohu na dvě části tak, že po jejich složení vznikne původní čtverec s kroužkem uprostřed.

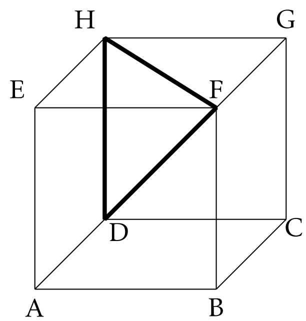


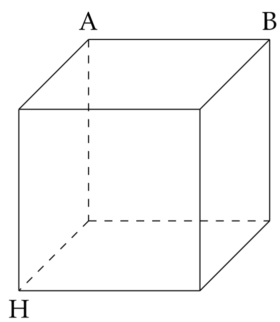
Příklad 6.4. Geometrický útvar na obrázku je rozdělen na čtyři shodné díly. Podaří se vám rozdělit na pět shodných dílů čtverec?

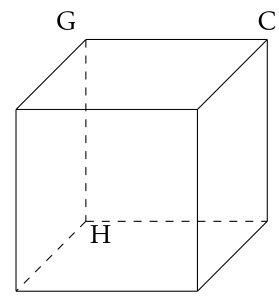


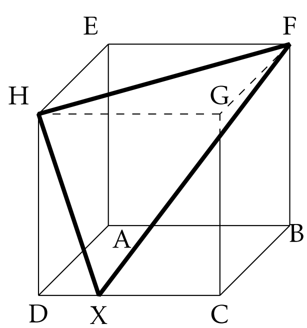


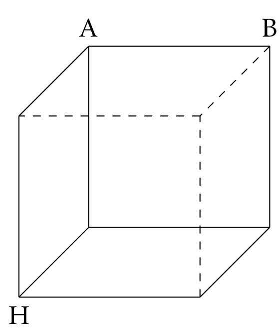
Příklad 6.5. Do drátěné krychle $ABCDEFGH$ je umístěn neprůhledný trojúhelník. U pootočených krychlí doplňte vrcholy a trojúhelník do nich zakreslete. Vyznačte viditelnost drátěných hran.

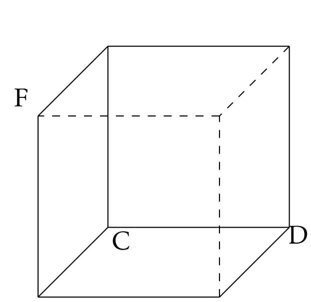




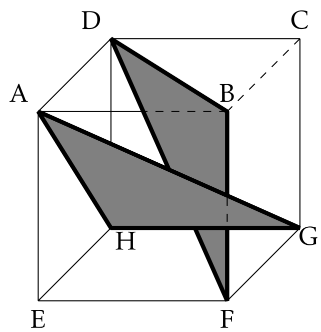


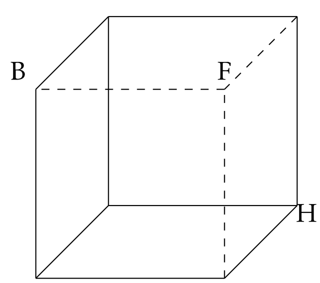


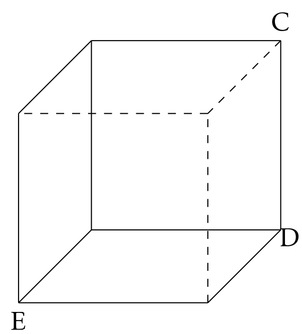


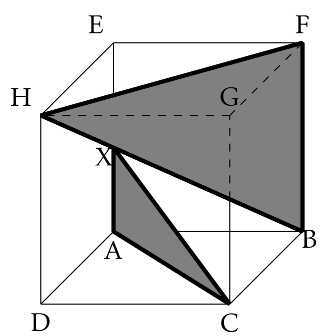


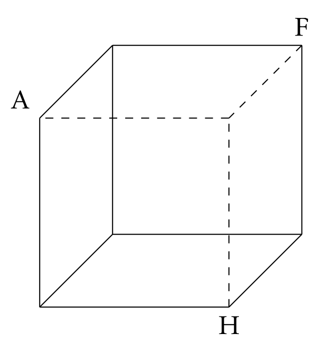
Příklad 6.6. V krychli $ABCDEFGH$ jsou dva neprůhledné trojúhelníky. Zakreslete je v pootočení.

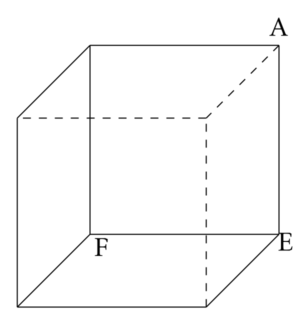




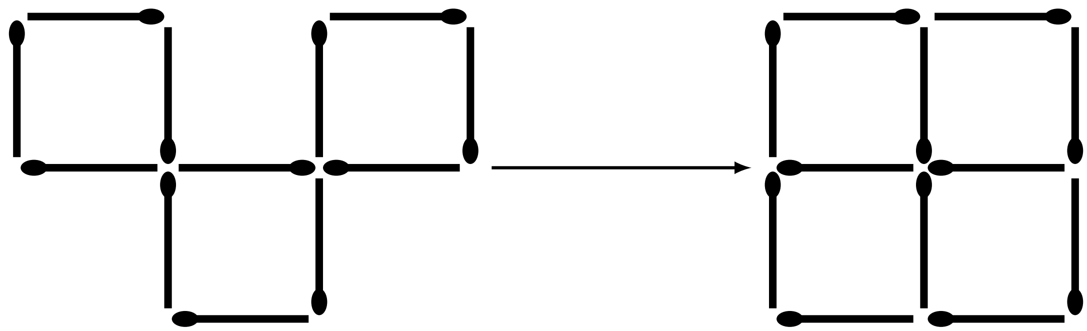




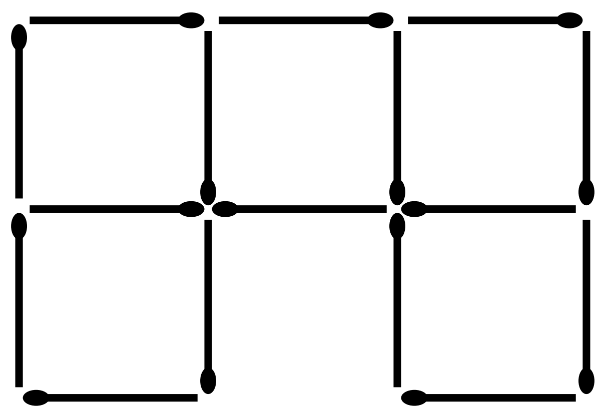




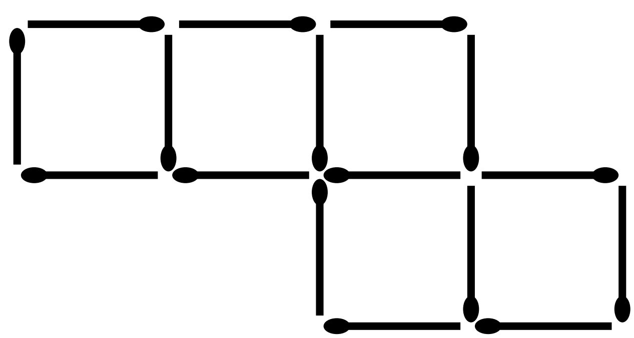
Příklad 6.7. Přemístit tři zápalky na obrázku na obrázku tak, aby vznikly čtyři shodné čtverce není nic obtížného.



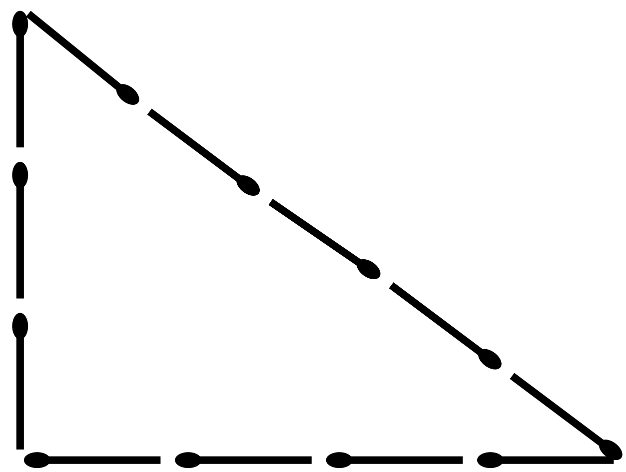
Příklad 6.8. Zkuste přemístit tři zápalky tak, aby vznikly čtyři shodné čtverce.



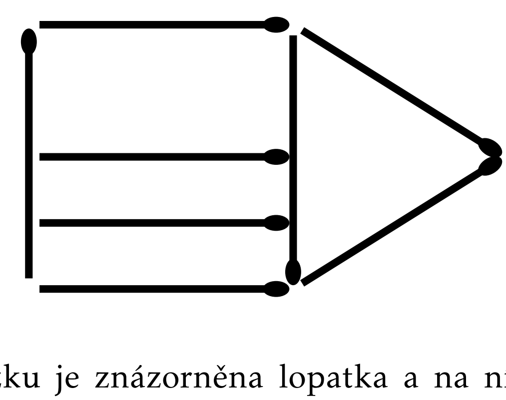
Příklad 6.9. Pokuste se přemístit dvě zápalky tak, aby vznikly čtyři shodné čtverce.



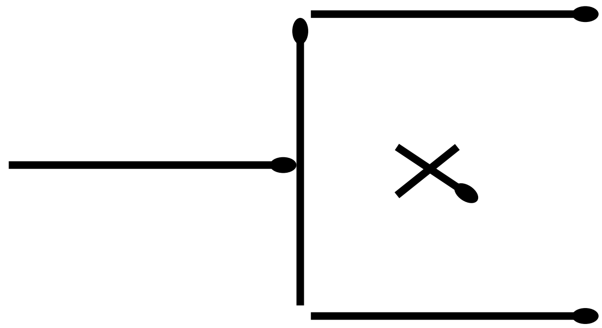
Příklad 6.10. Na obrázku je z dvanácti zápalek sestrojen pravoúhlý trojúhelník. Jestliže zvolíme délku zápalky za délkovou jednotku, můžeme říci, že obsah pravoúhlého trojúhelníka je $S = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ čtverečných jednotek. Pokuste se přemístit čtyři zápalky tak, aby vznikl obrazec, jehož obsah by byl jen tři čtverečné jednotky.



Příklad 6.11. Na obrázku je znázorněn obrazec vytvořený z 8 zápalek, které ohraničují, kromě jiných útvarů, čtverec, trojúhelník a 3 obdélníky. Podaří se vám vytvořit z 8 zápalek obrazec, v němž zápalky ohraničují 2 čtverce a 4 trojúhelníky s podmínkou, že zápalky nesmíte lámat nebo překládat jednu přes druhou?

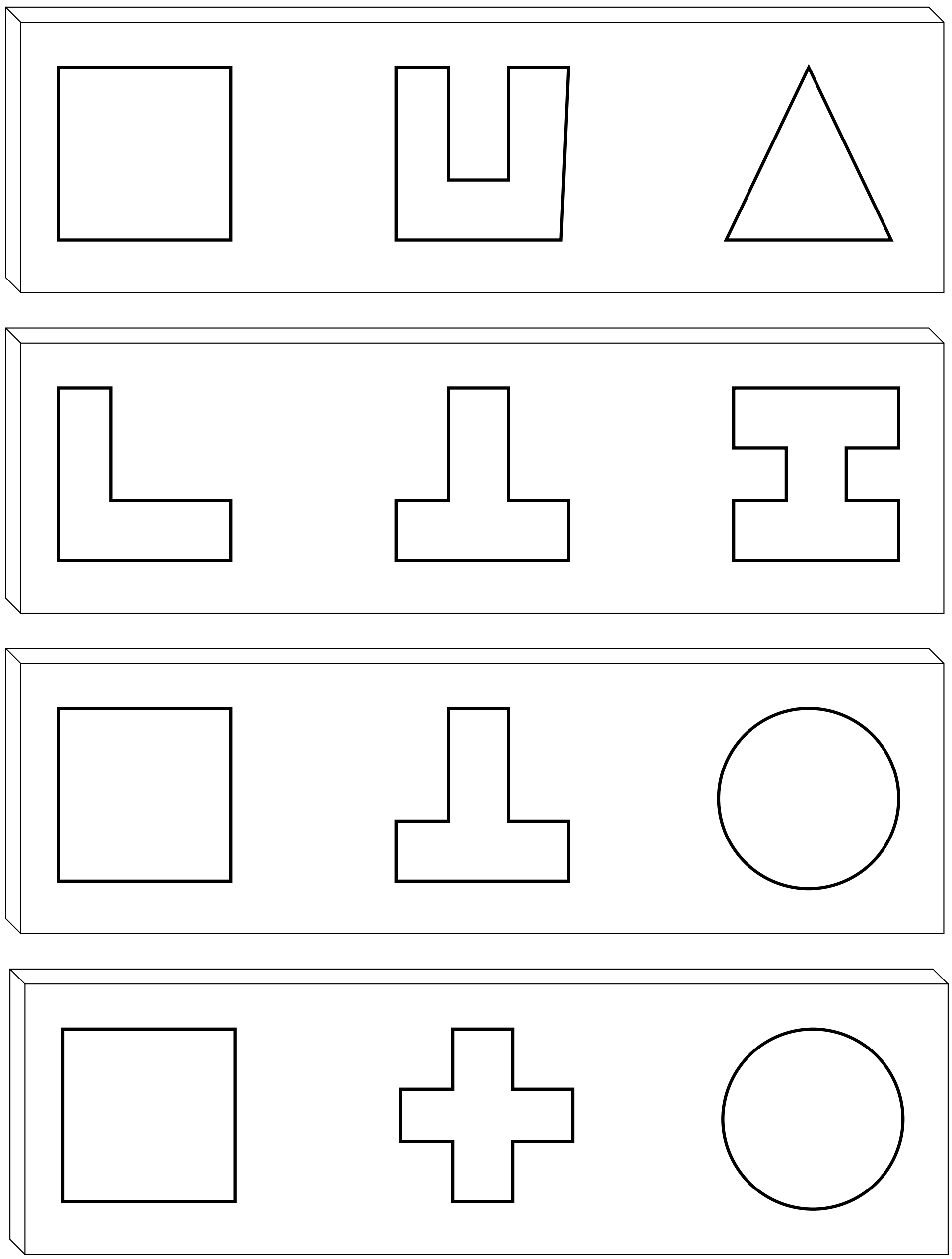


Příklad 6.12. Na obrázku je znázorněna lopatka a na ní smetí. Vaším úkolem je přeložit jen dvě zápalky tak, aby se smetí dostalo z lopatky.

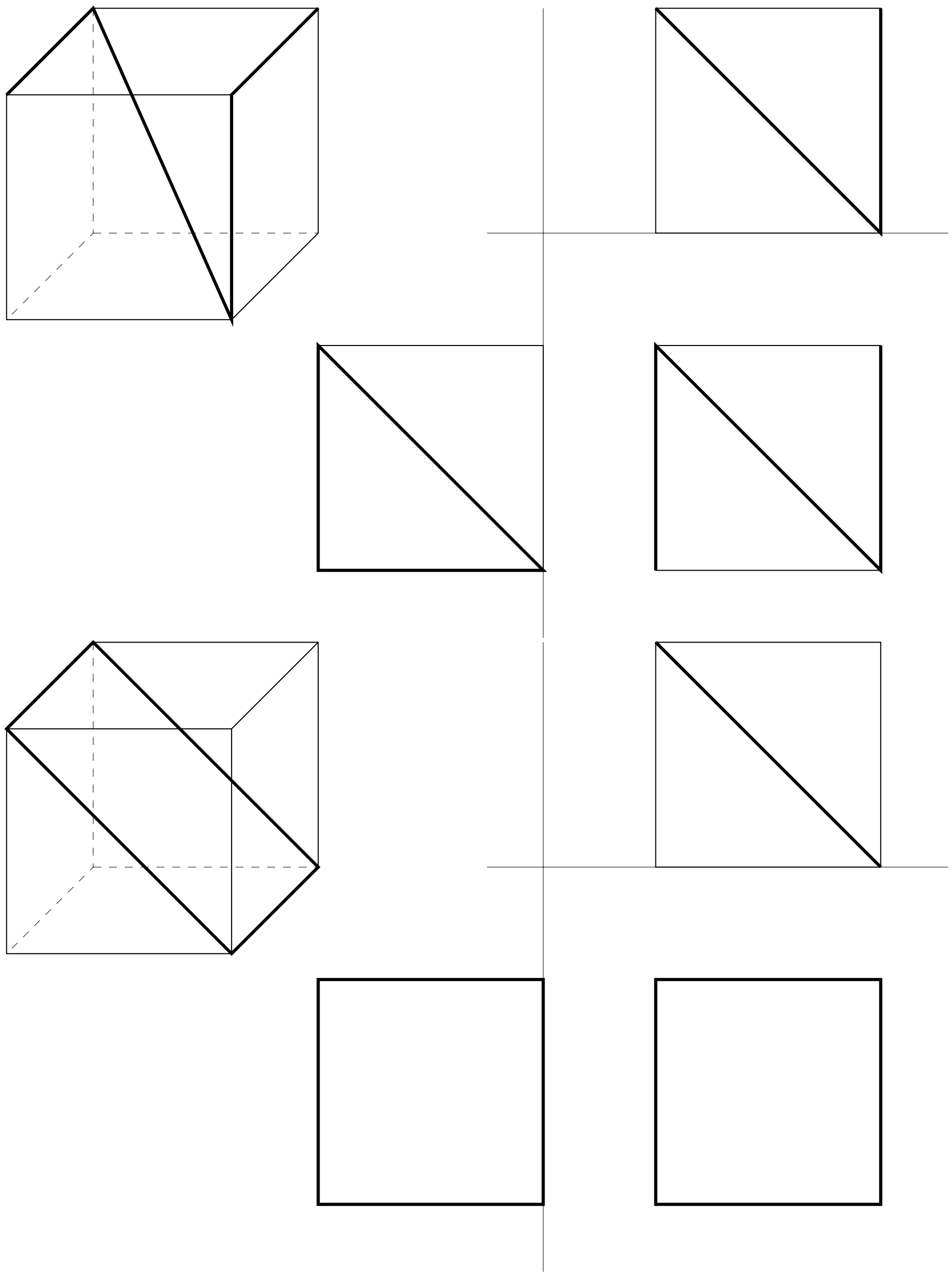


Příklad 6.13. Dovedete sestavit z 20 zápalek 6 čtverců a 20 trojúhelníků? Zápalky však nesmíte lámat nebo klást přes sebe.

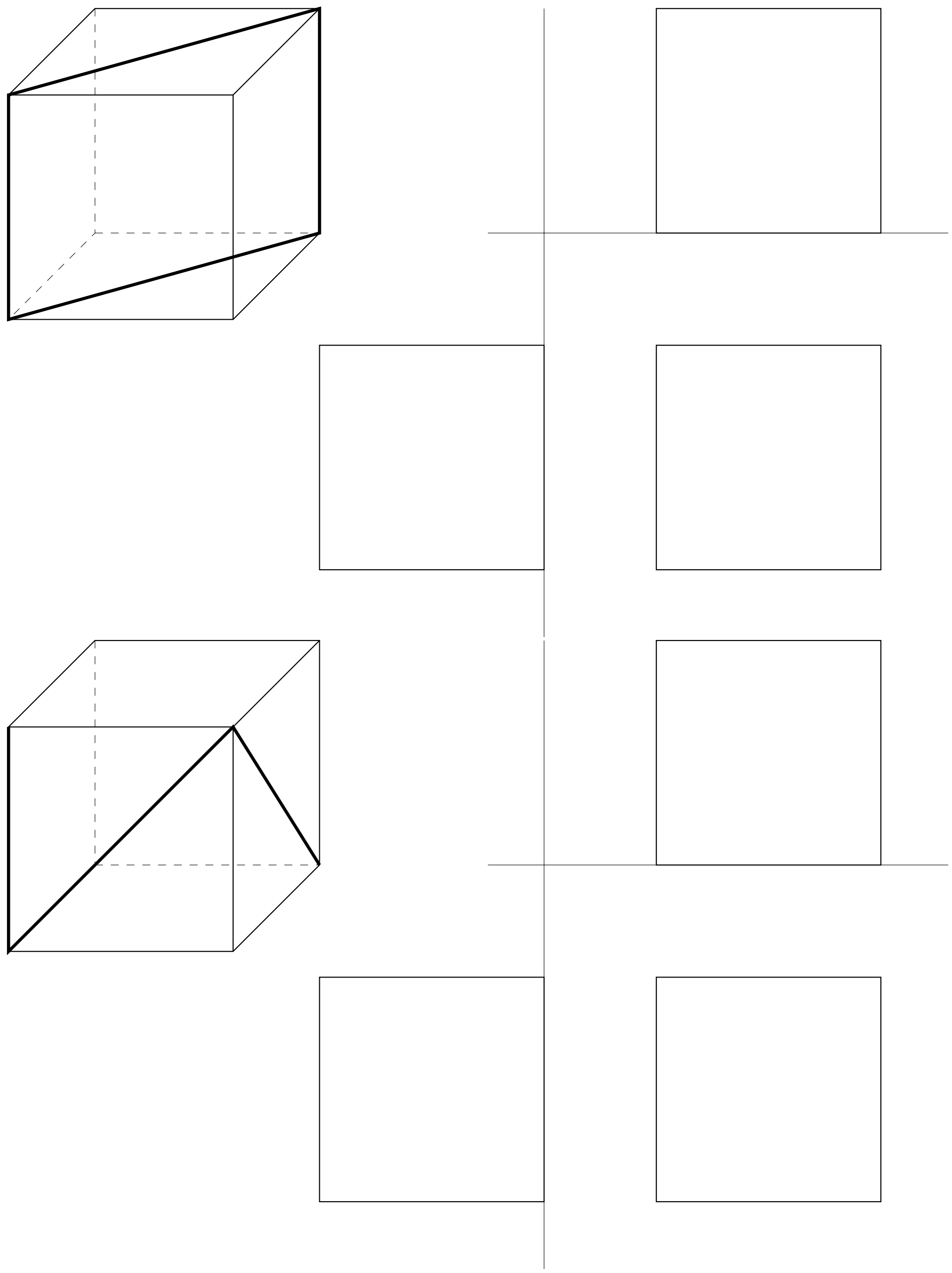
Příklad 6.14. Na obrázcích jsou znázorněny dřevěné desky, ve kterých jsou otvory. Můžeme zhotovit jediné těleso, které by prošlo těsně všemi třemi otvory. Pokuste se nakreslit jeho tvar.



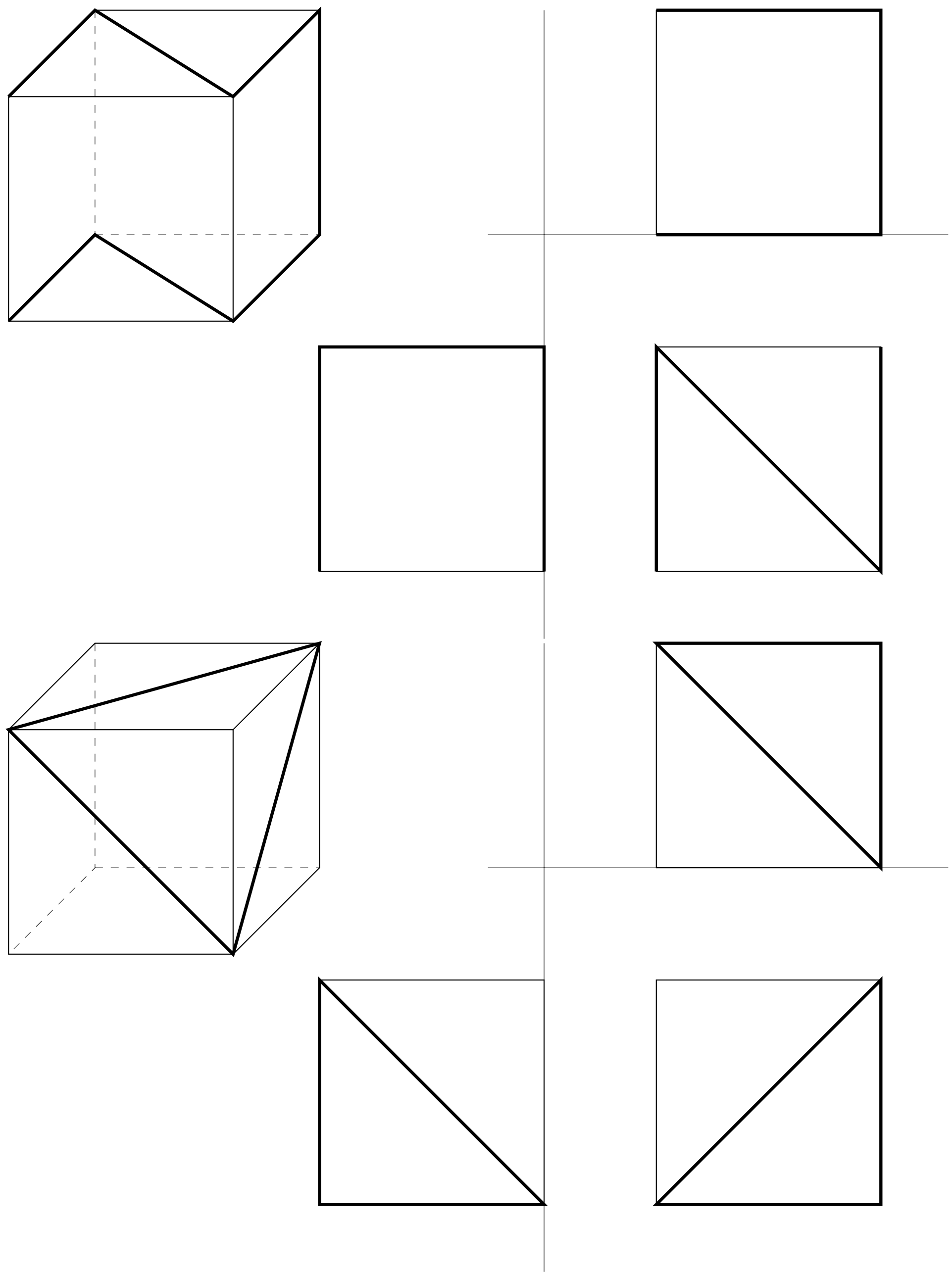
Příklad 6.15. Dobře si prohlédni názorný obraz, půdorys, nárys i bokorys čáry!



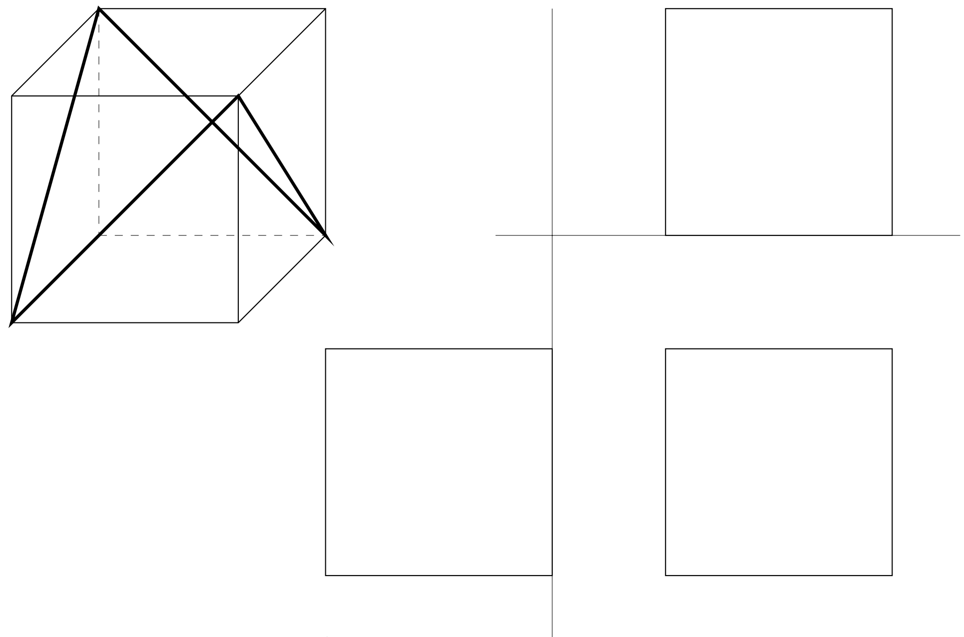
Příklad 6.16. Podle názorného obrazu čáry sestroj její průměty.

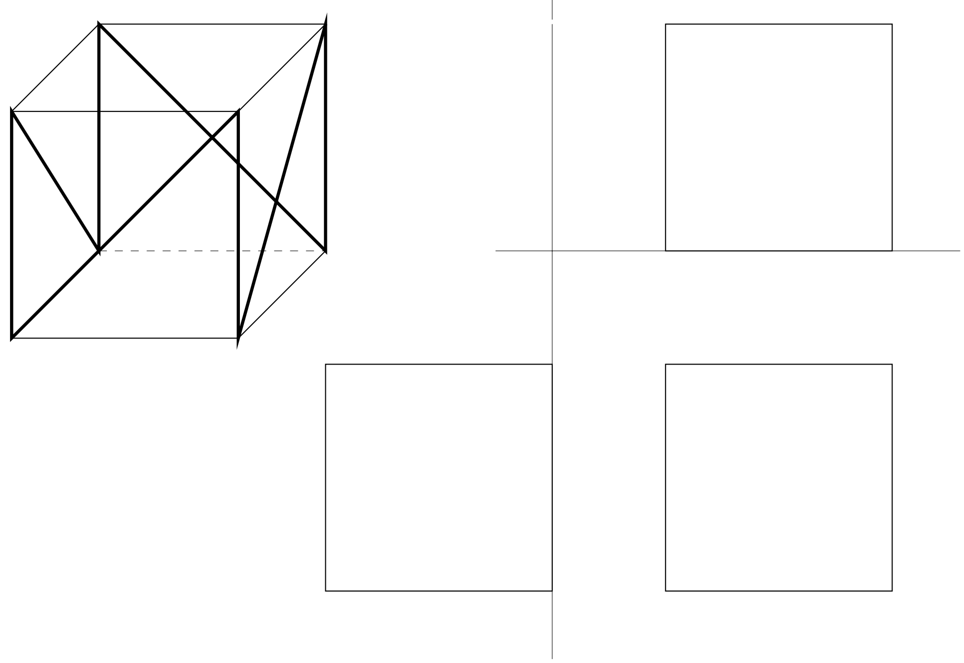


Příklad 6.17. Dobře si prohlédni názorný obraz, půdorys, nárys i bokorys čáry!

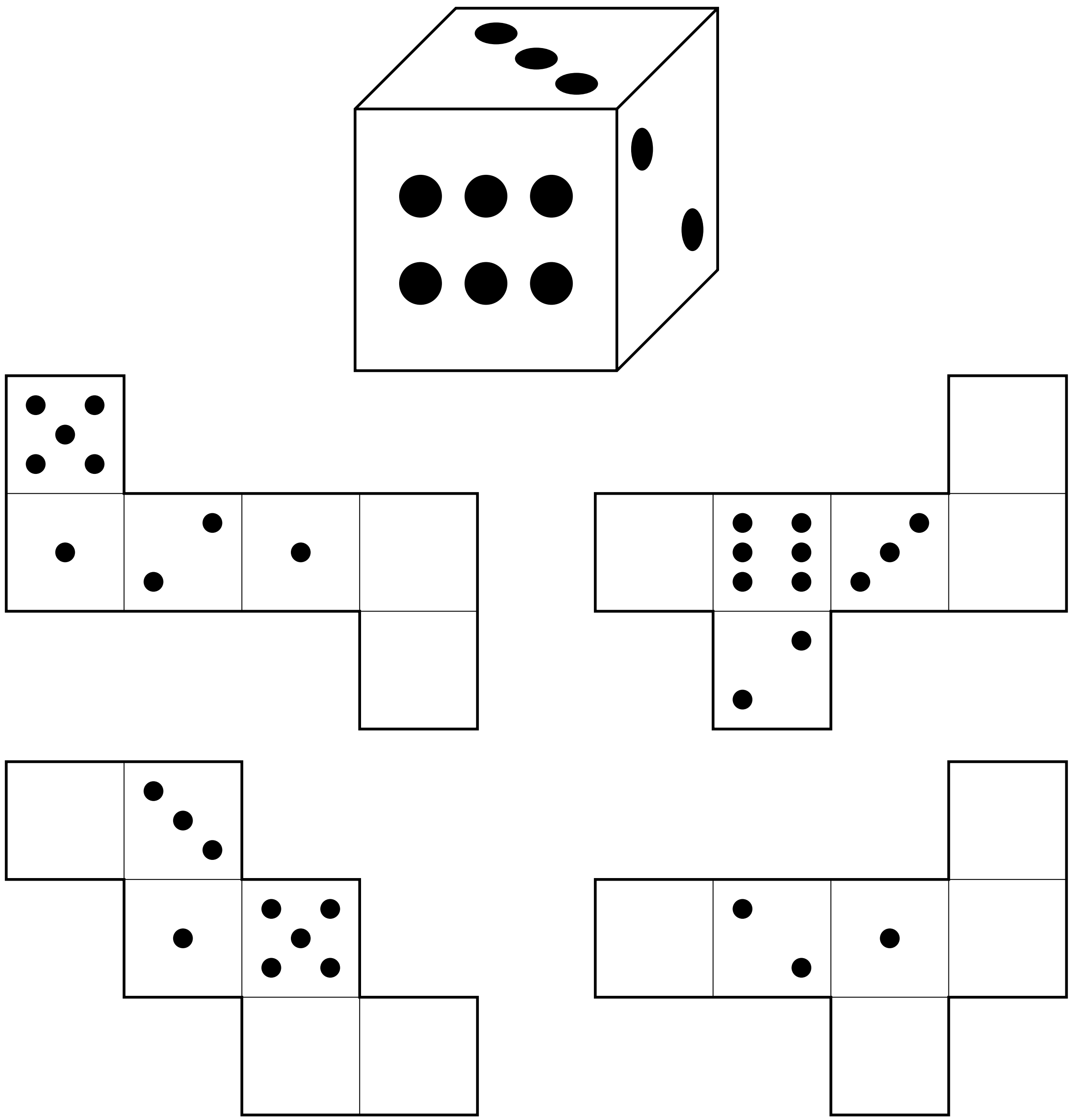


Příklad 6.18. Podle názorného obrazu čáry sestroj její průměty.

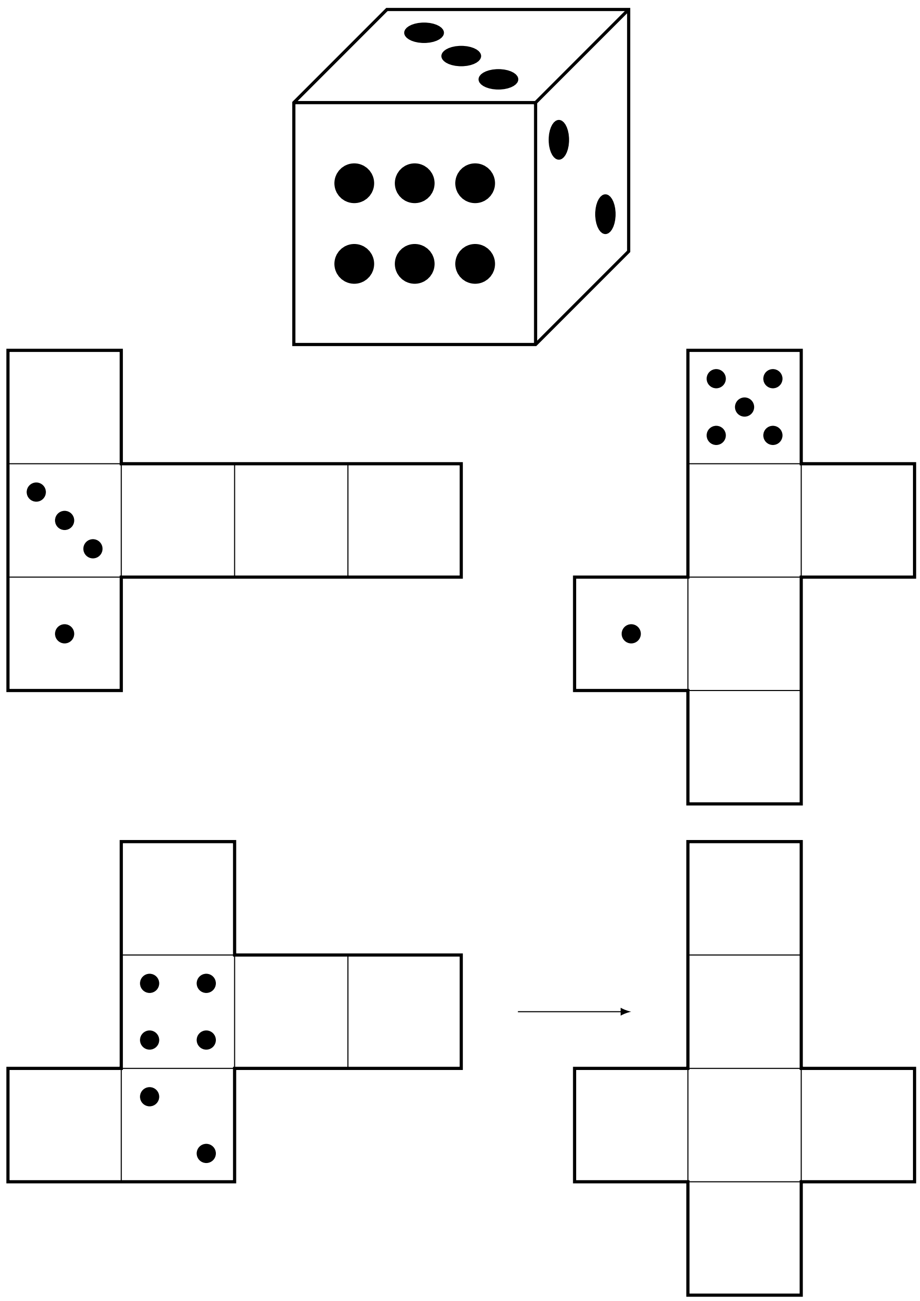




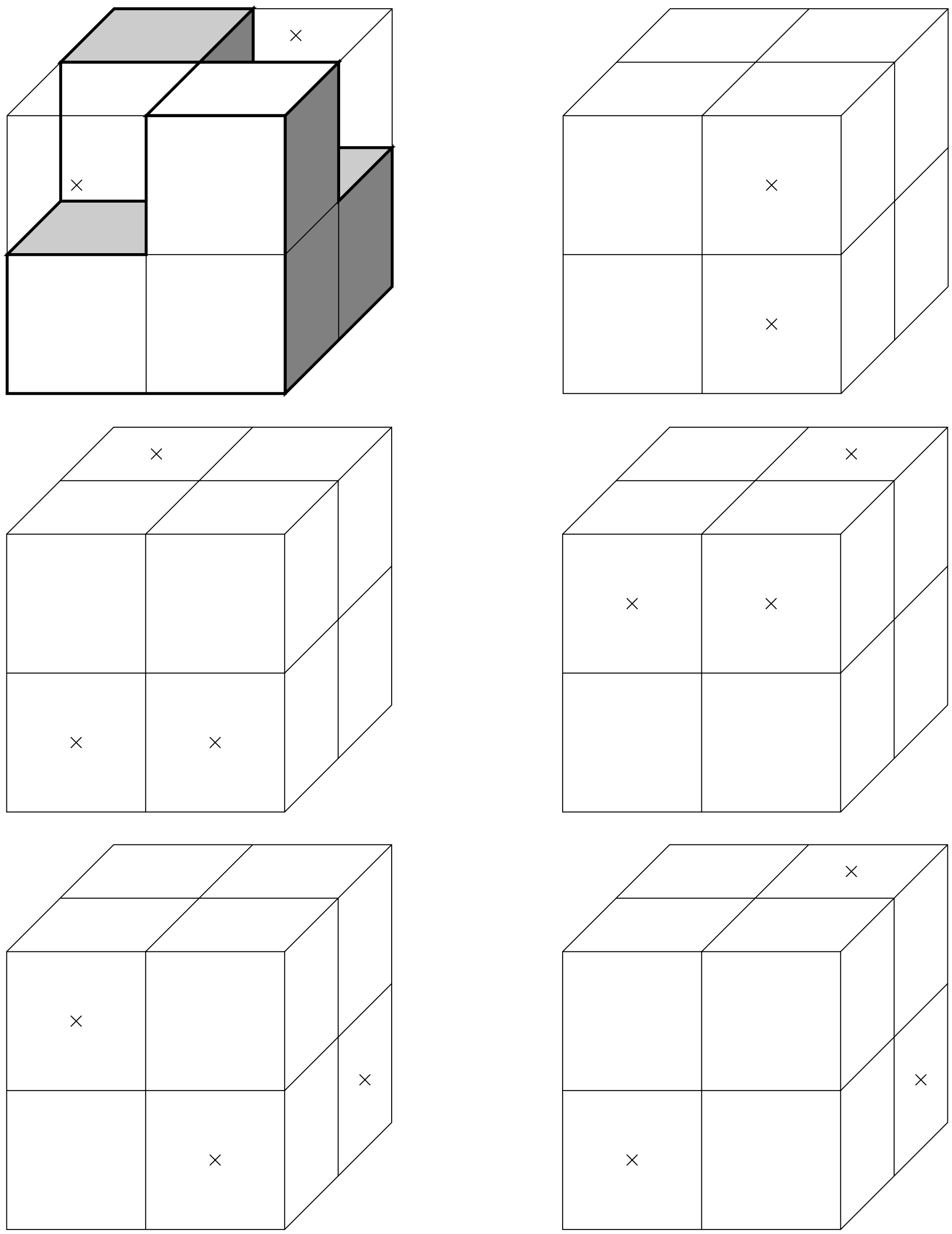
Příklad 6.19. Správná hrací kostka má na protilehlých stěnách: 1+6; 2+5; 3+4 oka. Dej pozor na polohu ok ve stěně. Dokresli oka do sítí tak, aby po vystřižení a složení krychle vznikla vždy tato hrací kostka. (Na sítích zakresluj líc.)



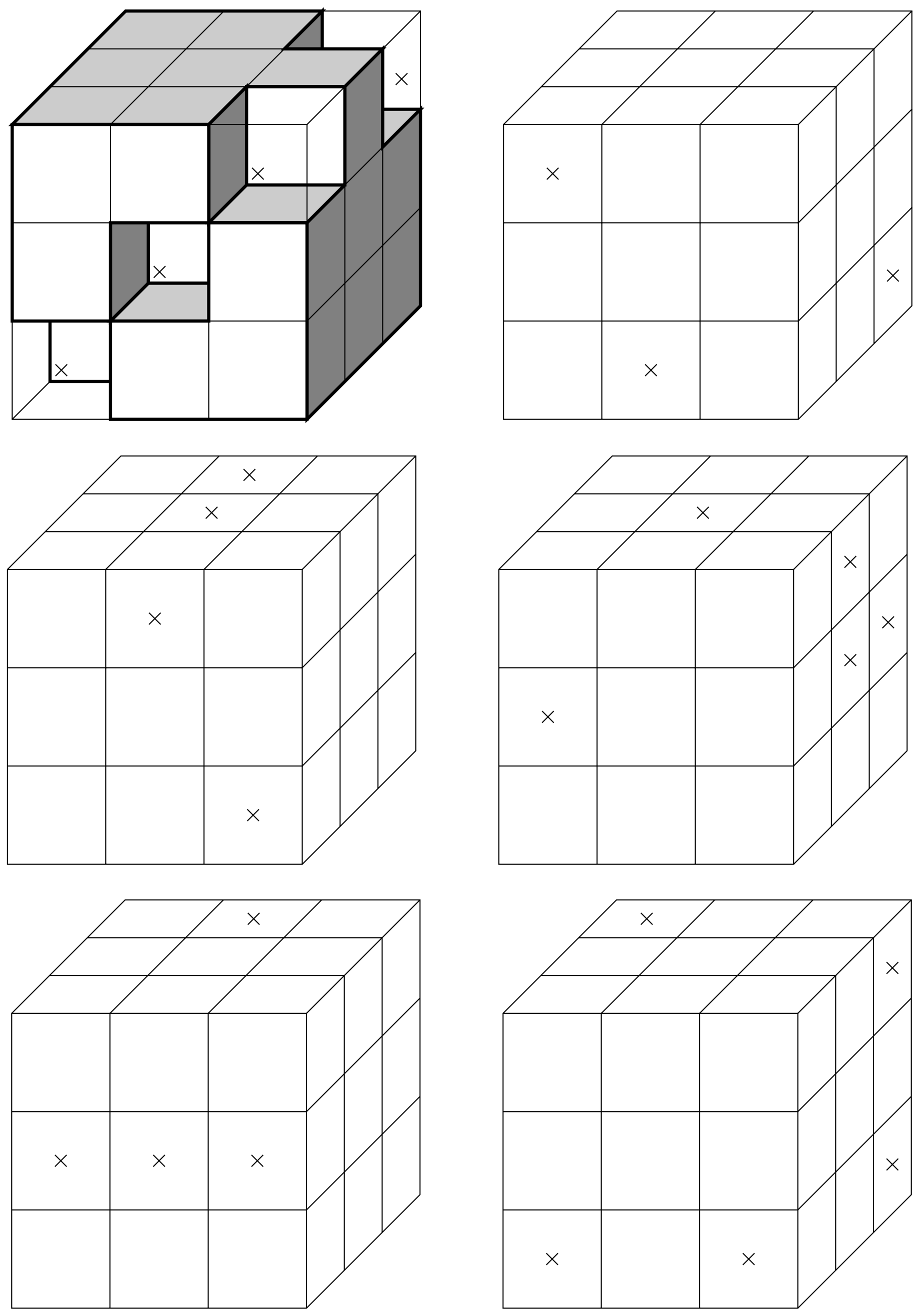
Příklad 6.20. Správná hrací kostka má na protilehlých stěnách: 1+6; 2+5; 3+4 oka. Dej pozor na polohu ok ve stěně. Dokresli oka do sítí tak, aby po vystřižení a složení krychle vznikla vždy tato hrací kostka. (Na sítích zakresluj líc.)



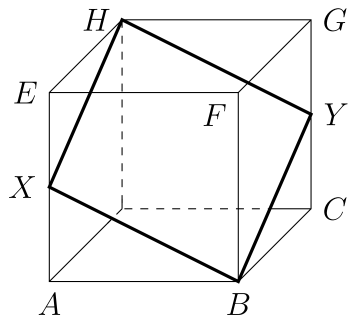
Příklad 6.21. Máme zde krychle složené z osmi menších krychliček. Krychličky označené křížkem odebereme. Vytáhni silně (a doplň), co z krychlí zbude.

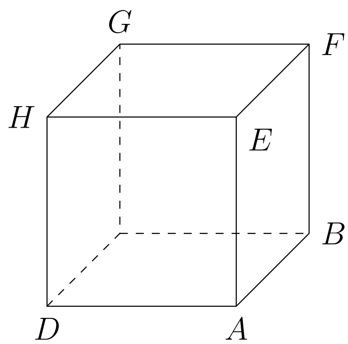


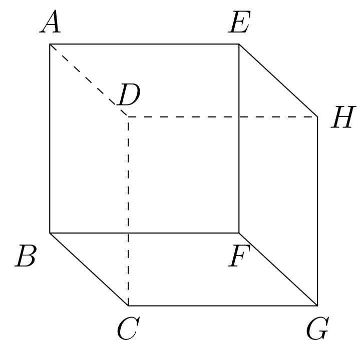
Příklad 6.22. Máme zde krychle složené z dvaceti sedmi menších krychliček. Krychličky označené křížkem odebereme. Vytáhni silně (a doplň), co z krychlí zbude.

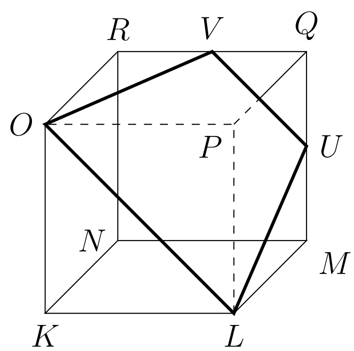


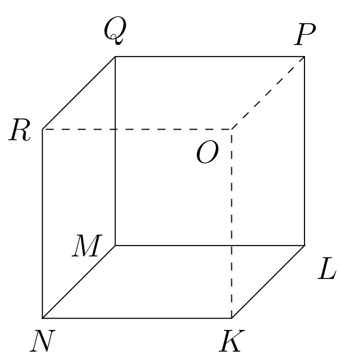
Příklad 6.23. V drátěné krychli je umístěn neprůhledný čtyřúhelník. Zakresli ho v pootočených plochách na následujících krychlích.

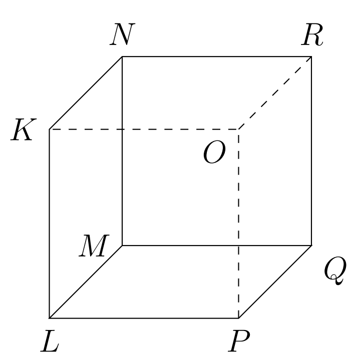




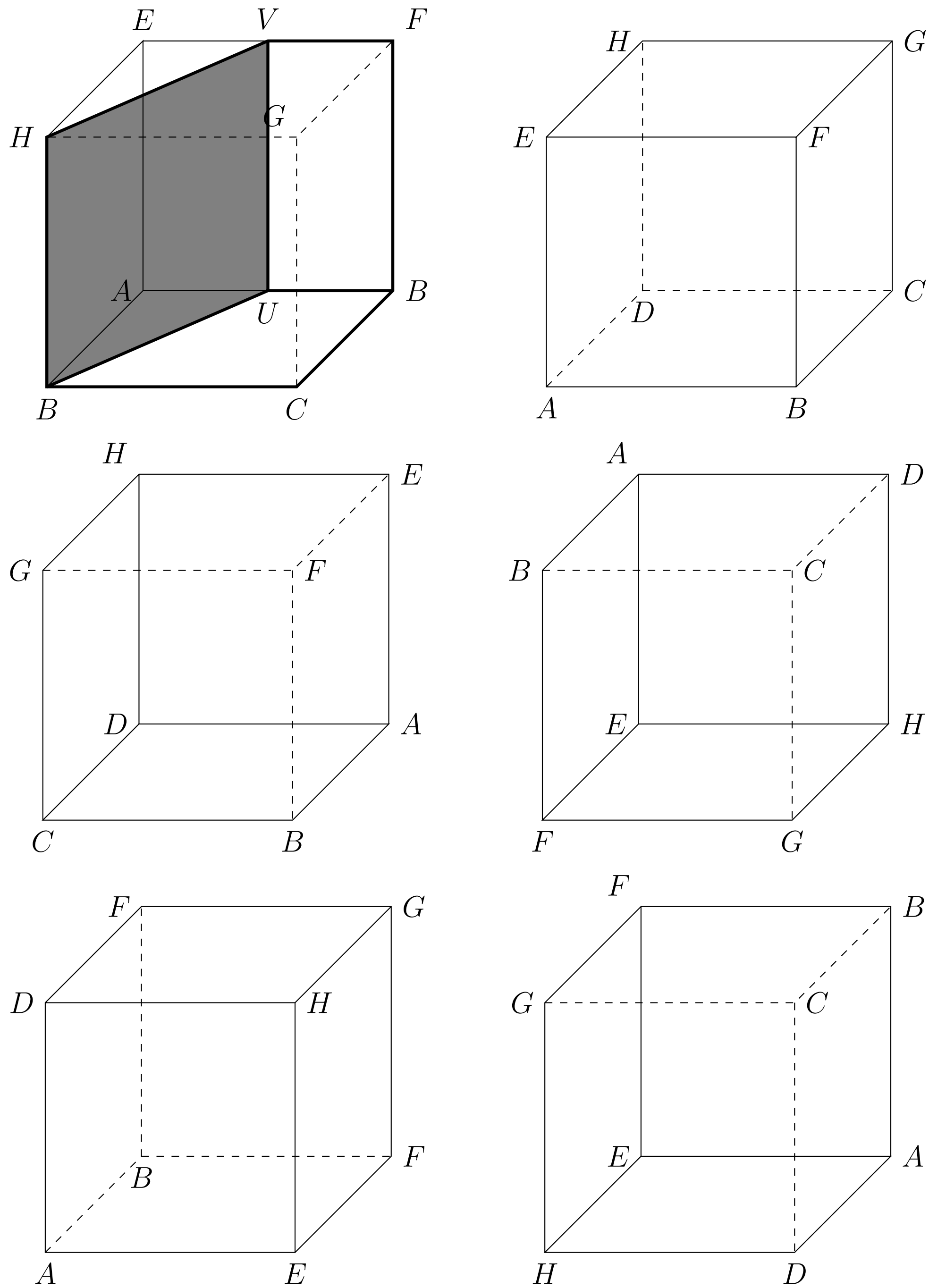




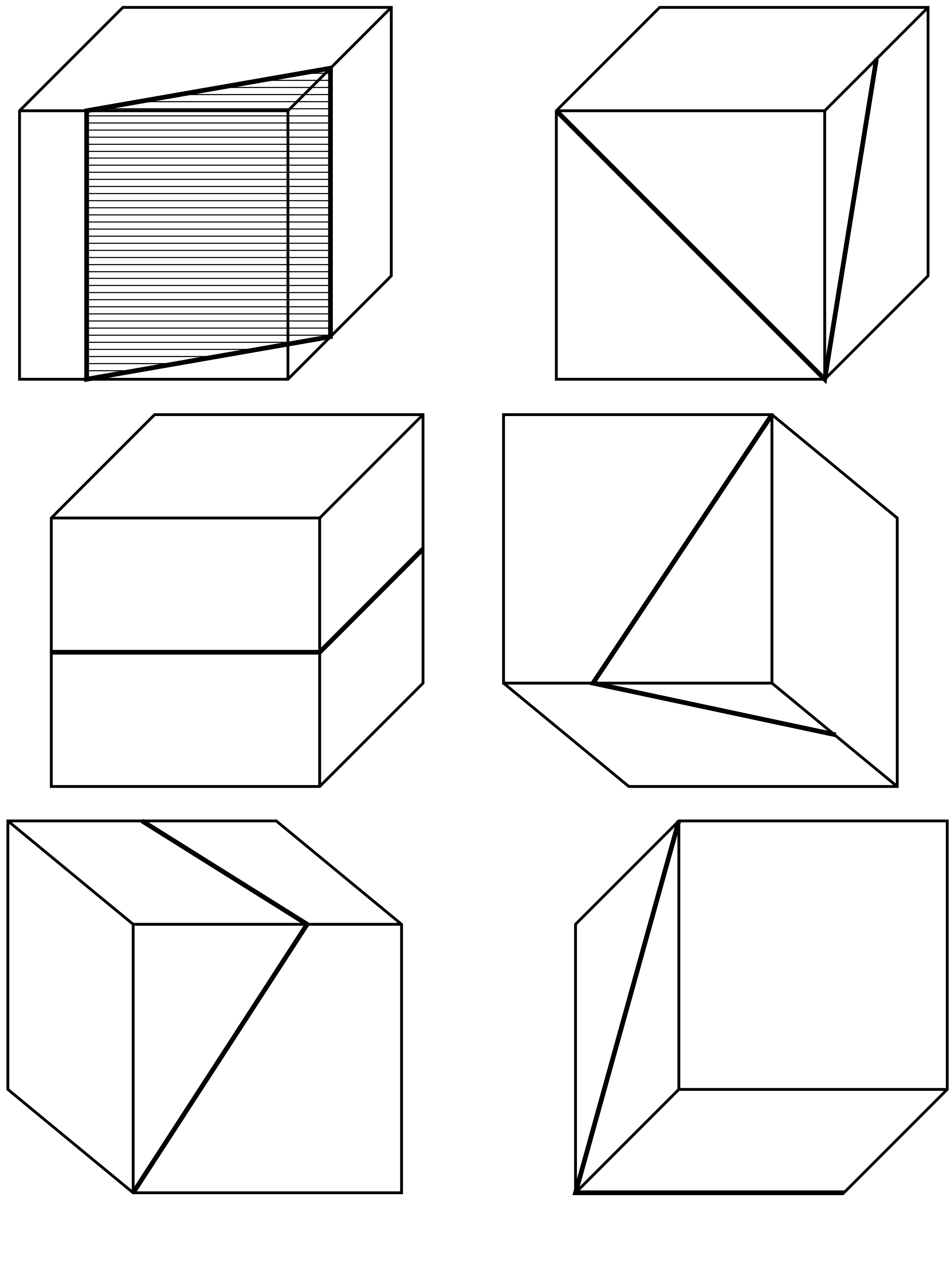




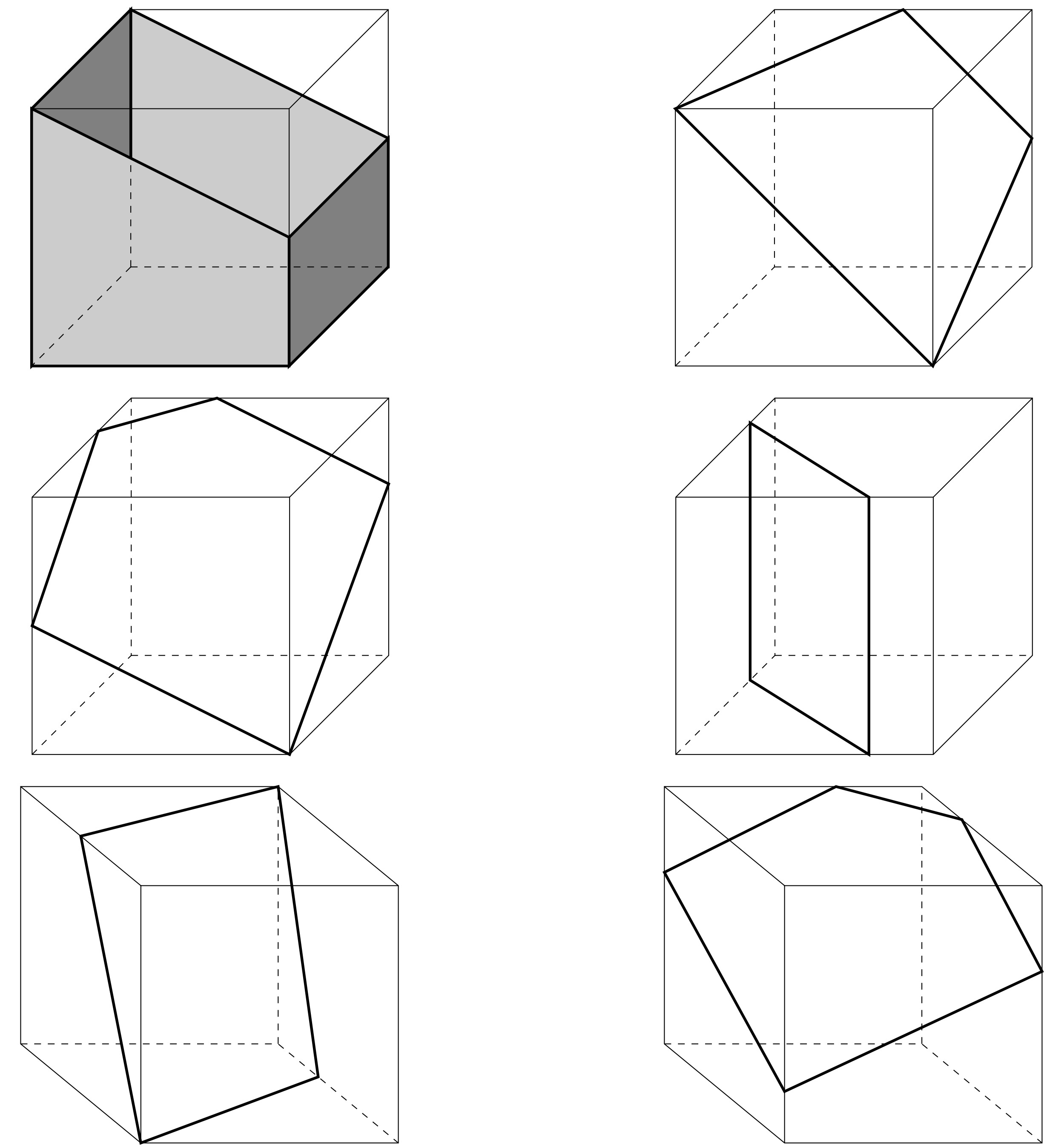
Příklad 6.24. Krychle je seříznuta rovinou. Zakresli zbytek krychle silně v pootočení.



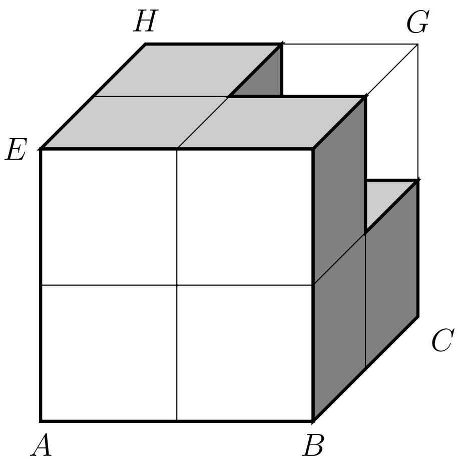
Příklad 6.25. Dokresli obrazec, ve kterém rovina odřízne část krychle.

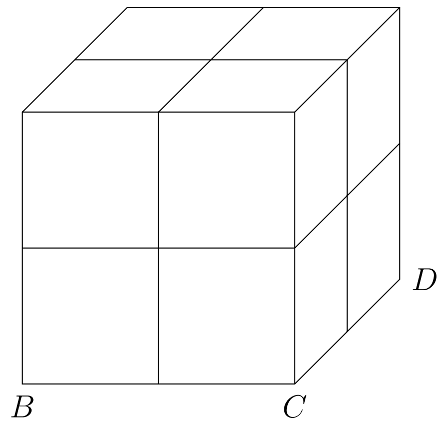


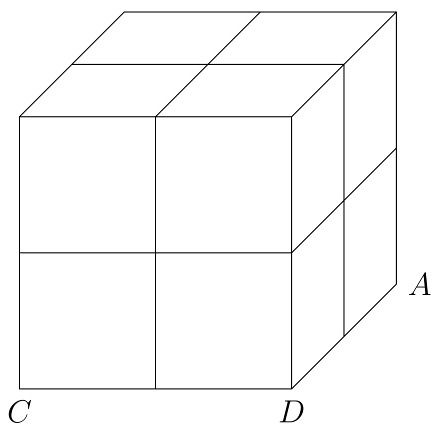
Příklad 6.26. Prázdné krabičky jsou seříznuté rovinou. Vytáhni silně, co z krabičky zbude. Dvojice rovnoběžných stěn zbytku krabičky vybarvěte stejnou barvou.

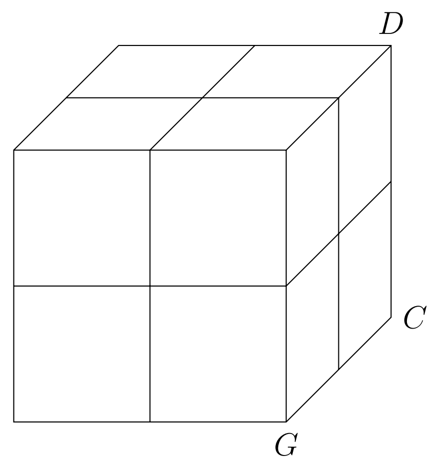


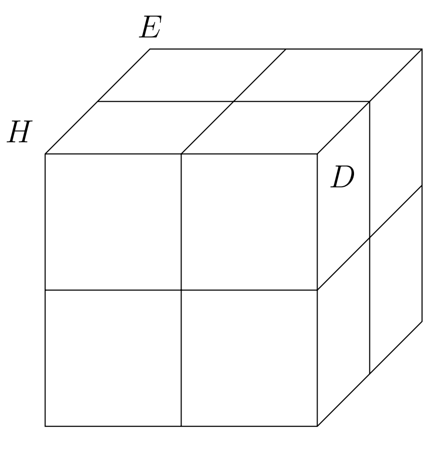
Příklad 6.27. Nakreslete tělesa složená z krychlí z jiných pohledů. Popište nejprve vrcholy.

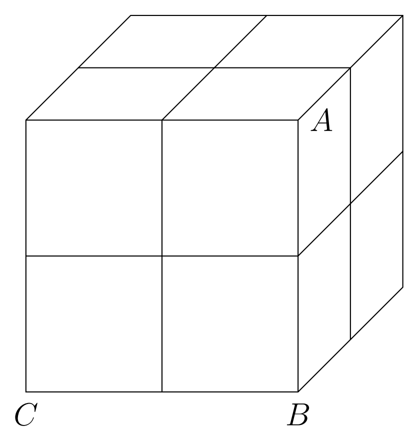




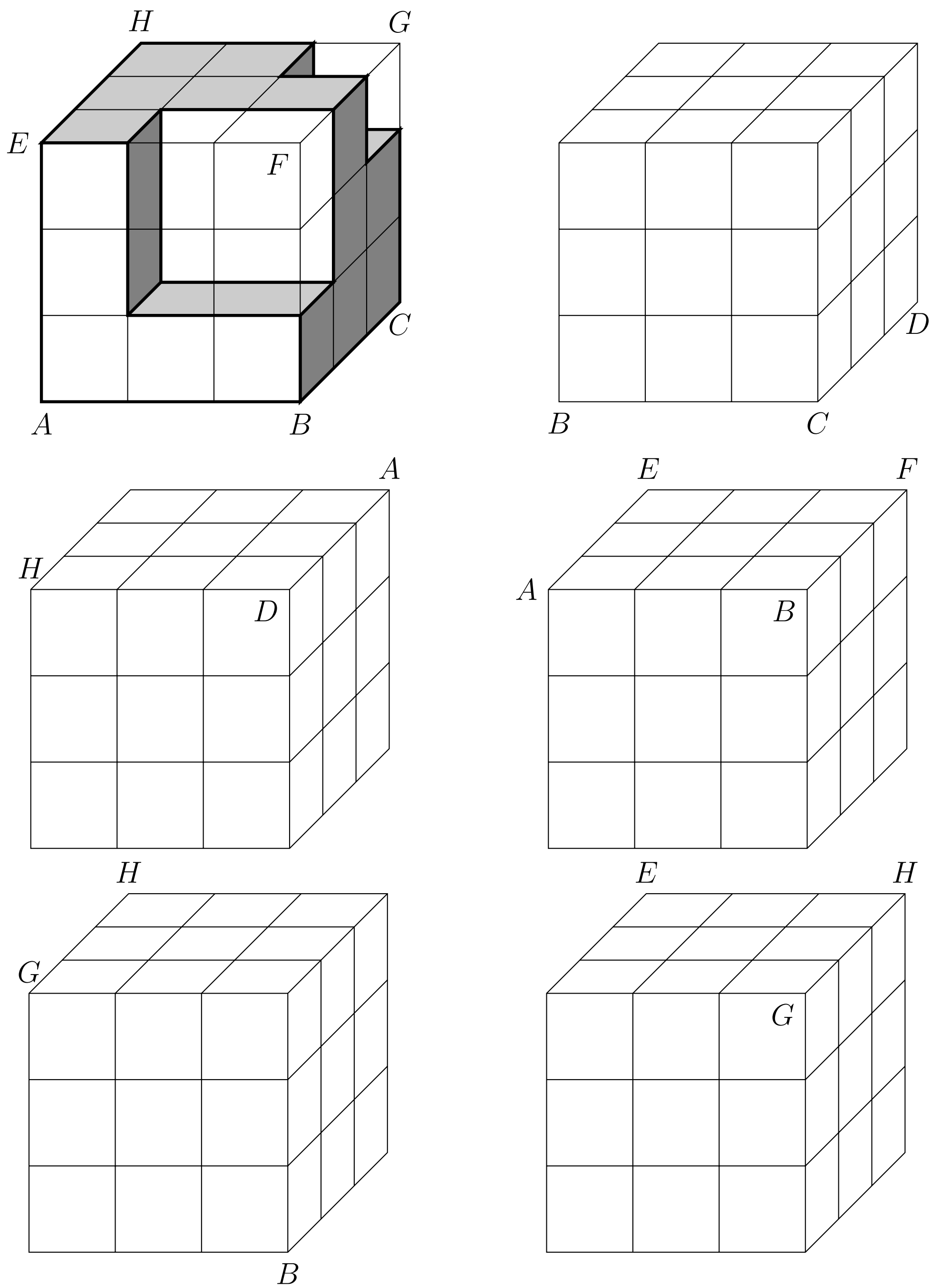




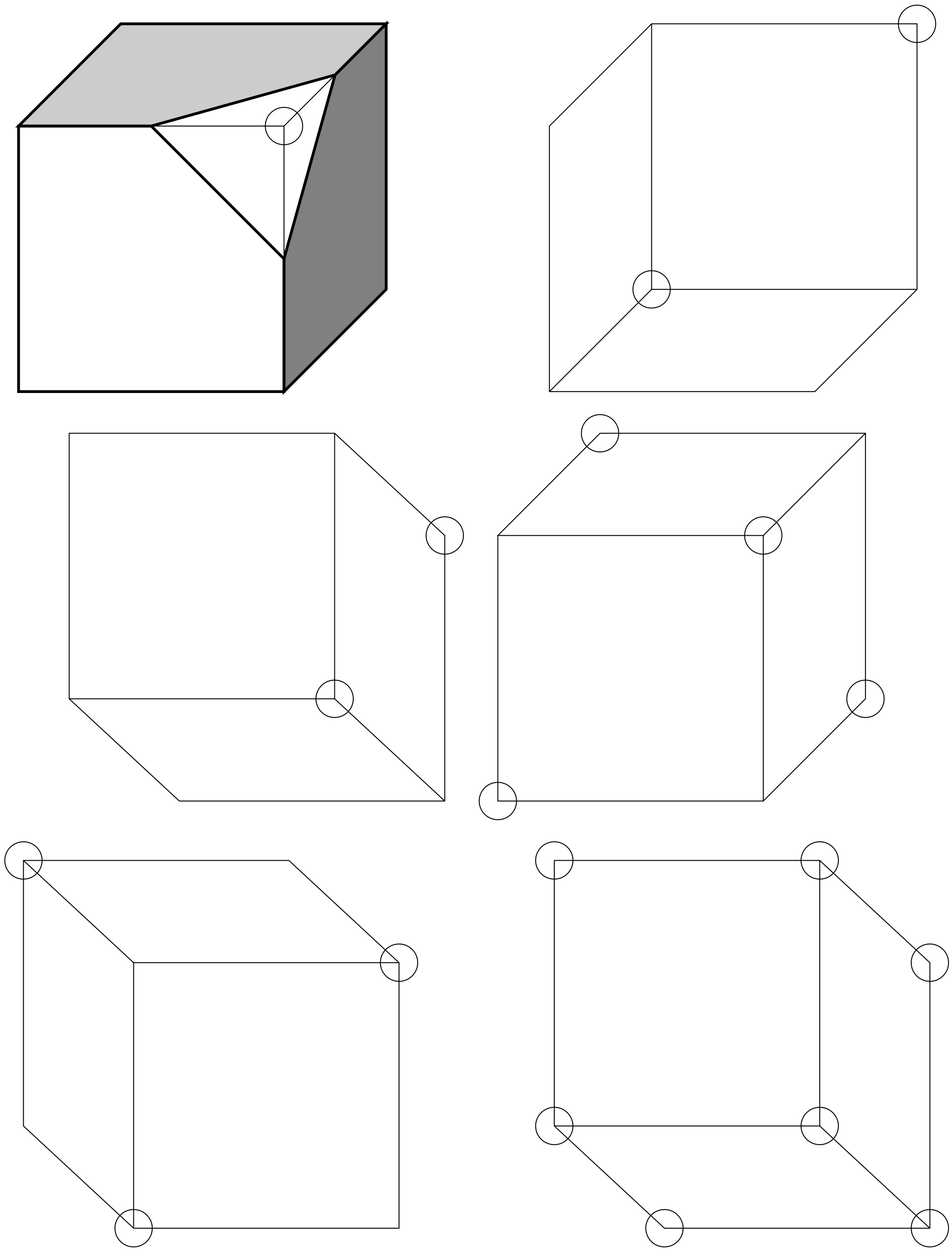




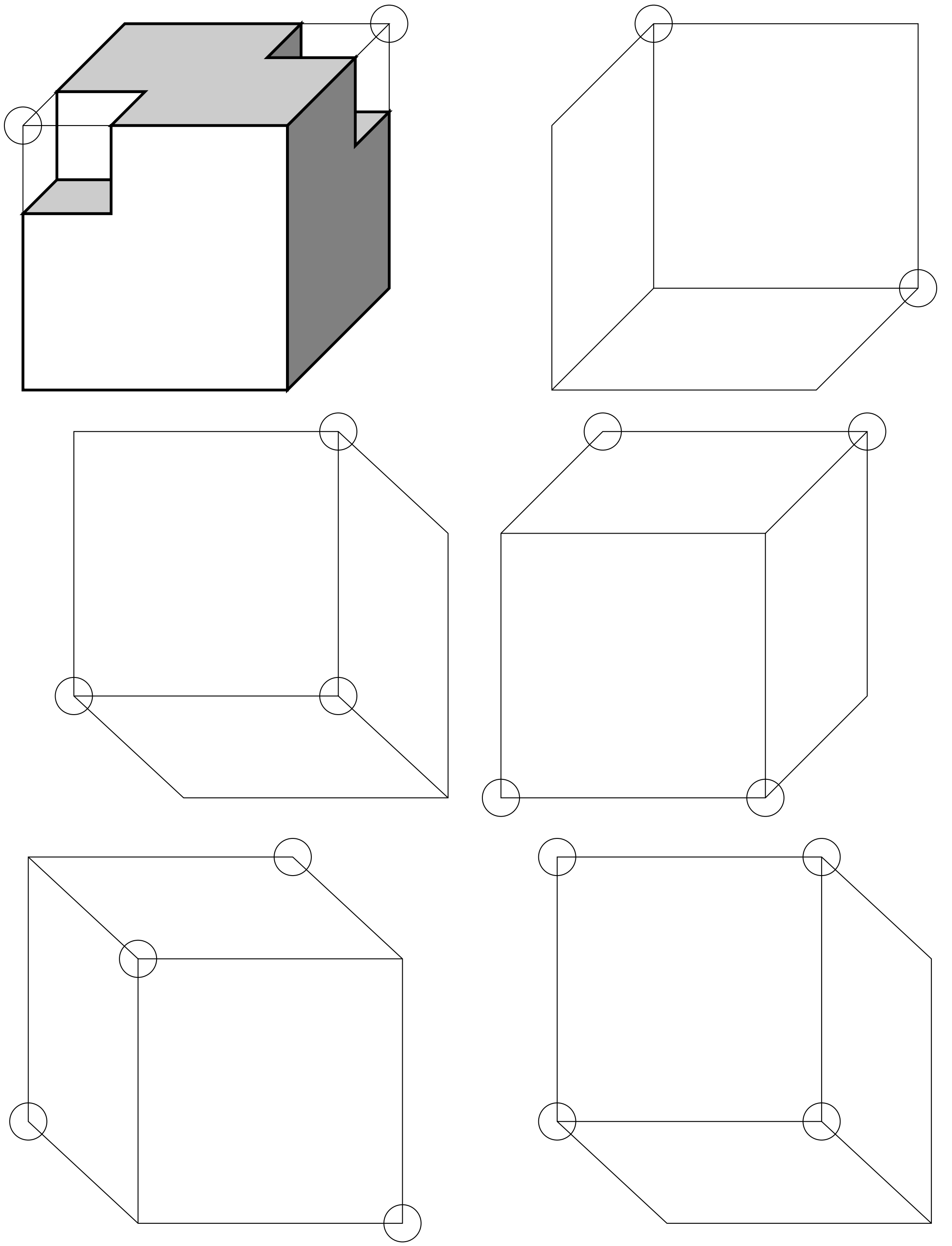
Příklad 6.28. Nakreslete tělesa složená z krychlí z jiných pohledů. Popište nejprve vrcholy.



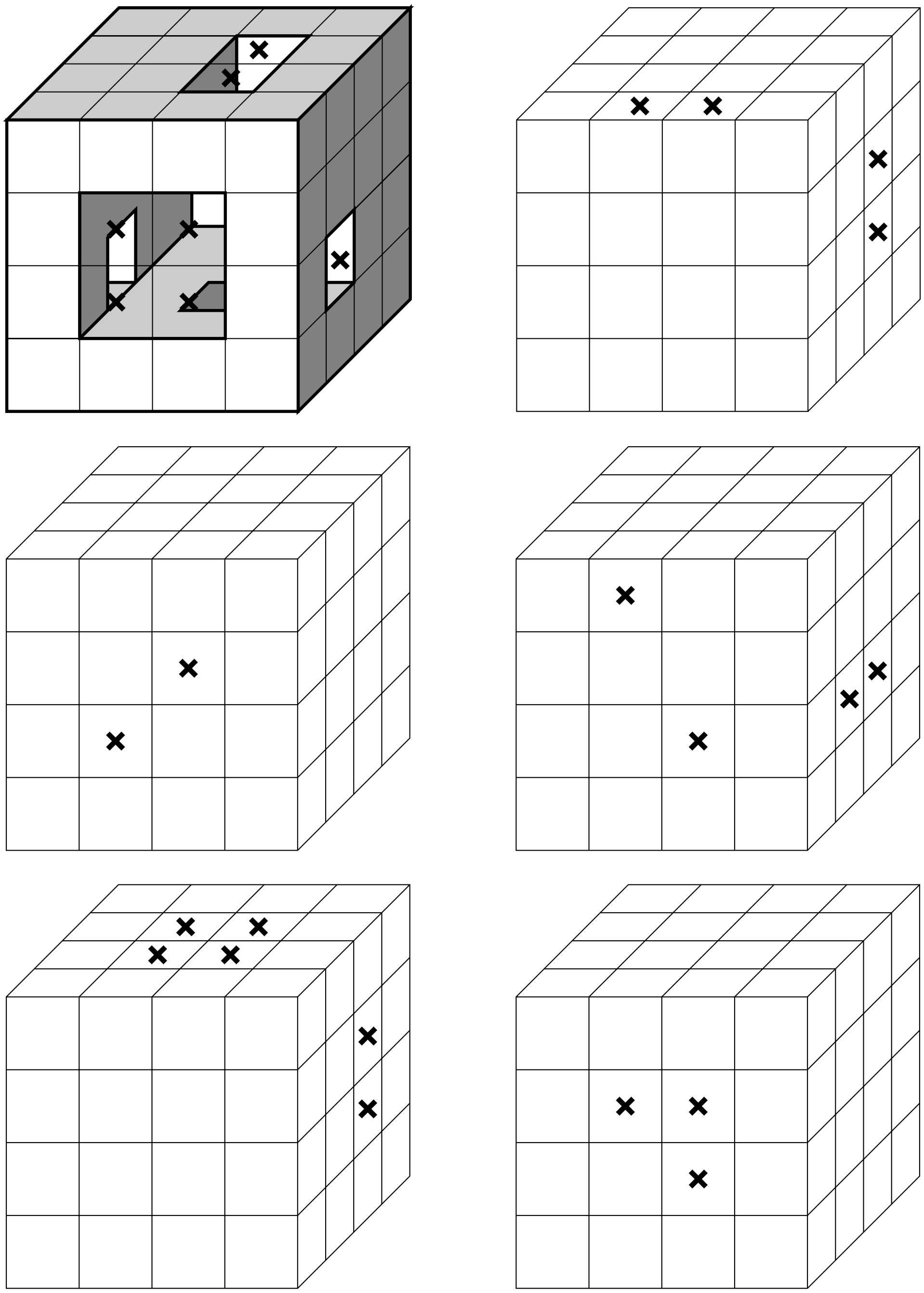
Příklad 6.29. Odřízni vyznačené vrcholy krychle podle nakresleného návodu a urči viditelnost.



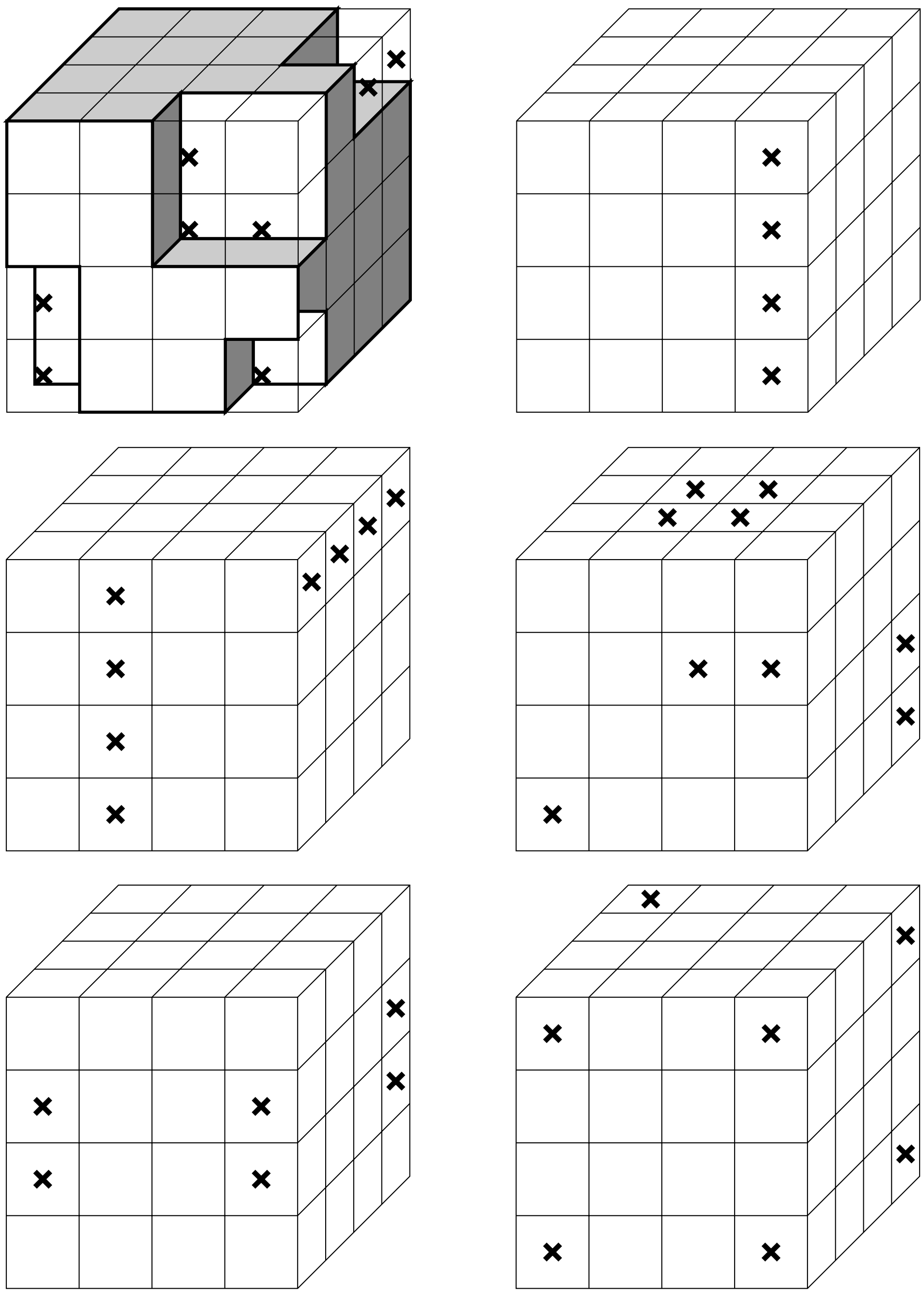
Příklad 6.30. Odřízni vyznačené vrcholy krychle podle nakresleného návodu a urči viditelnost.



Příklad 6.31. Krychle složené z malých krychliček jsou provrtané vždy skrz naskrz (označeno křížkem). Vytáhněte silně, co zbude. Víte kolik krychliček bylo odstraněno?



Příklad 6.32. Z krychlí jsou odstraněný pouze malé krychličky označené křížkem. Vytáhněte silně tělesa, která po odstranění krychliček zbudou. Vybarvěte. Uměli byste určit povrch těchto těles?

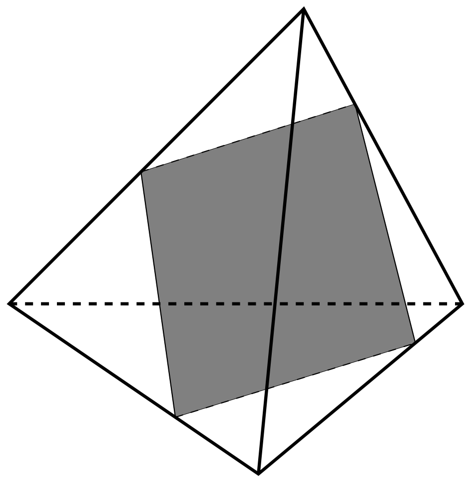


7 Stereometrické hry

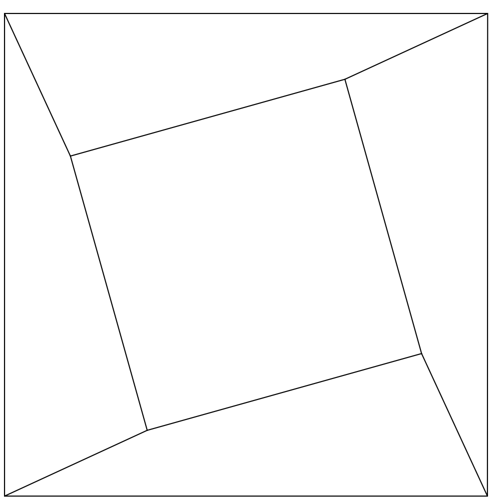
Příklad 7.1. Ze šesti zápalek sestavte čtyři rovnostranné trojúhelníky se stranou délky sirky.

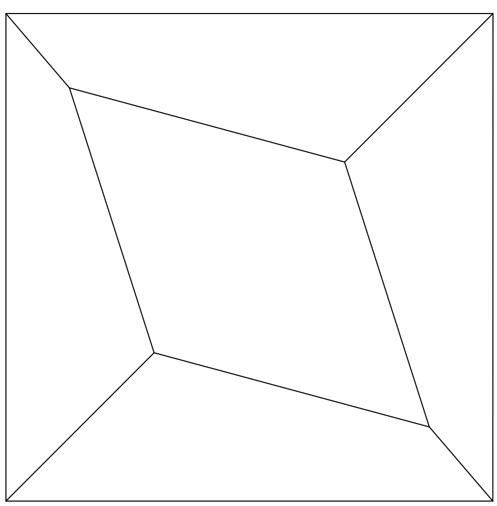
Příklad 7.2. Navrhněte praktický způsob, jak změřit (bez výpočtů) délku tělesové úhlopříčky cihly.

Příklad 7.3. Může být následující řez čtyřstěnu narýsován správně?



Příklad 7.4. Na následujících obrázcích jsou zobrazeny půdorysy dvou mnohostěnů (nemajících žádné další nezobrazené hrany). Je to možné?

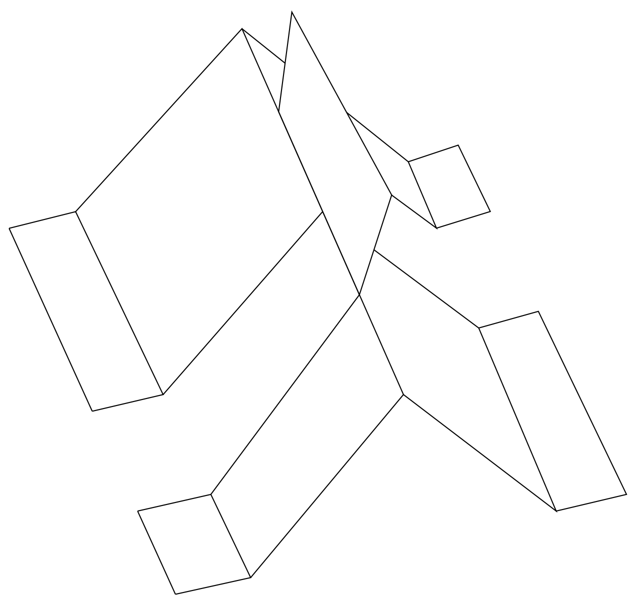




Příklad 7.5. Je možné v rovině proříznout tenký otvor, který ji nerozdělí na více částí, a kterým je přitom možné protáhnout drátěný model (bez ohýbání modelu nebo roviny)

1. krychle,
2. čtyřstěnu?

Příklad 7.6. Vystřihněte a složte z obdélníkového listu papíru (bez použití lepidla) následující skládačku:



Příklad 7.7. Rozhodněte, jestli je možné sestavit

1. šest,
2. sedm

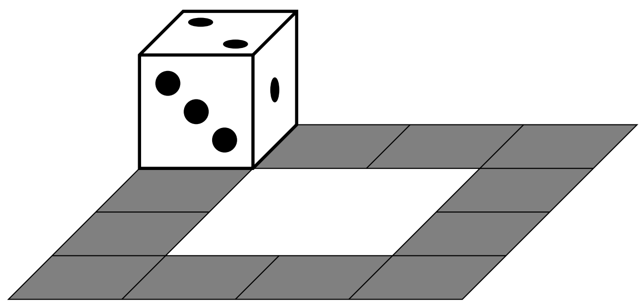
stejných tužek tak, aby se libovolné dvě z nich dotýkaly.

Příklad 7.8. Jistý člověk šel kilometr na sever, pak kilometr na západ a kilometr na jih. Ocitl se tak na místě, odkud vyšel. Jak je to možné?

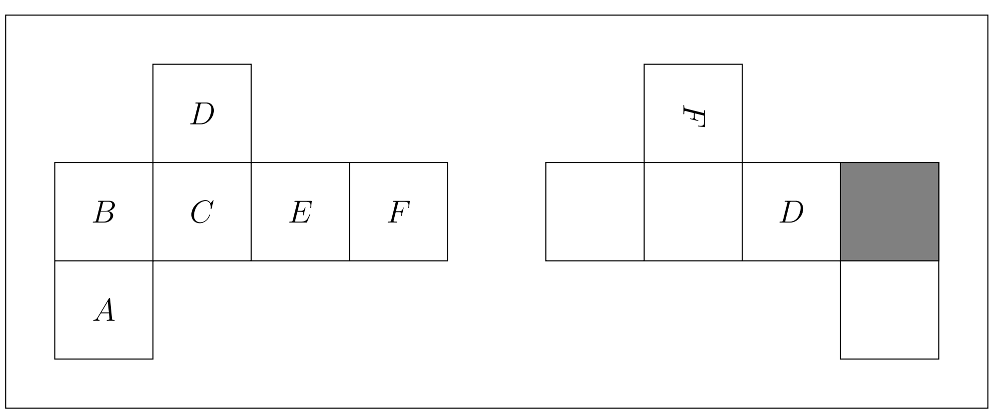
Příklad 7.9. Sedm shodných krychliček je slepeno do „kříže“ (ke každé stěně vybrané krychličky je přilepena jedna krychlička). Je možné těmito útvary zcela zaplnit prostor?

Příklad 7.10. Je možné povrch jednotkové krychle rozvinout do sítě, která se vejde do čtverce o rozměrech 3x3?

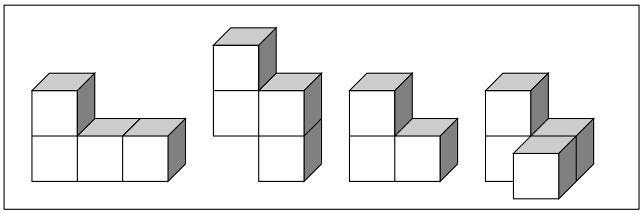
Příklad 7.11. Klasickou hrací kostku umístěme do rohu o dvanácti polích. Nyní budete kostku překlápět po okruhu stále dokola, než se dostanete na výchozí políčko. Kolik nejméně okruhů kostkou obejdete, než bude kostka ve stejné pozici jako na začátku?

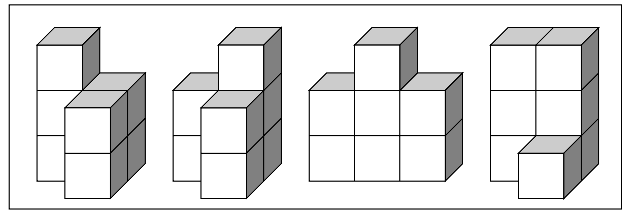


Příklad 7.12. Na stěnách hrací kostky jsou umístěna písmena od A až po F. Na prvním obrázku vpravo vidíte rozloženou síť takovéto krychle. Na druhém obrázku máte síť stejné krychle, ale s tím, že jsou již označeny jen některé stěny. Dokážete nyní doplnit, které písmeno je napsáno na tmavě zvýrazněné stěně na pravém obrázku?

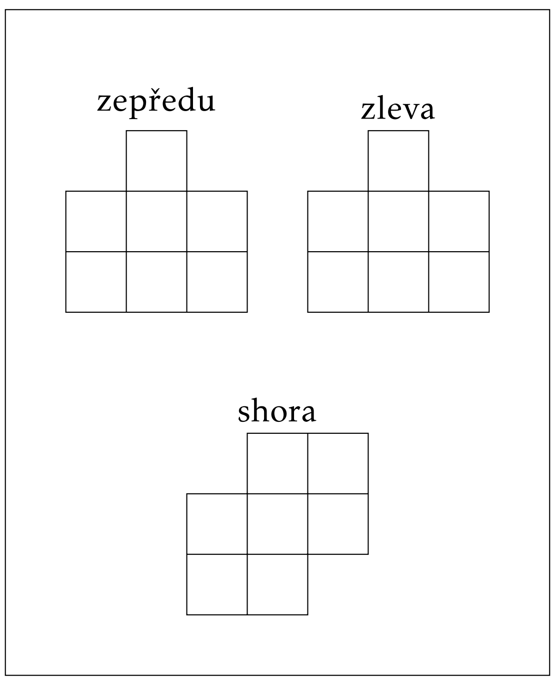


Příklad 7.13. Na obrázku jsou nakresleny čtyři dílky. Vaším úkolem je určit, které z nabízených staveb můžeme pomocí těchto dílků sestavit.

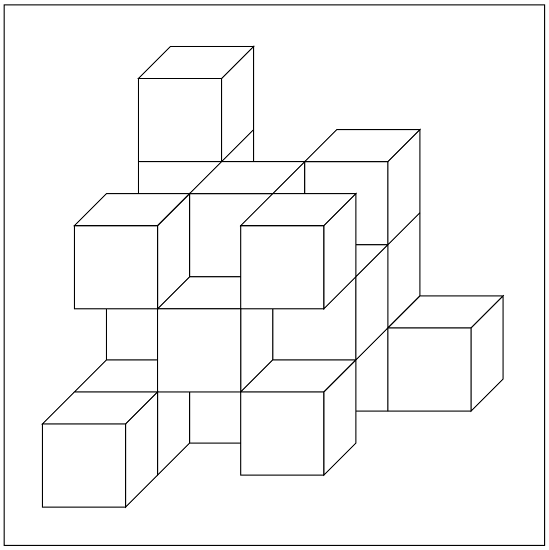


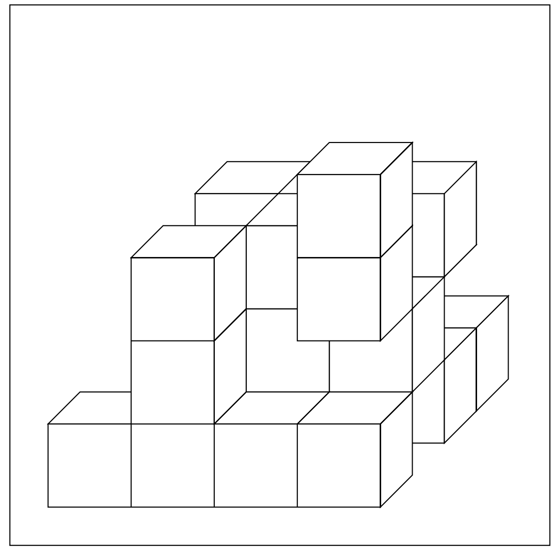


Příklad 7.14. Na obrázku máte tři pohledy na tutéž stavbu z krychlí. Vaším úkolem je určit, kolik krychlí musíme do stavby doplnit, abychom dostali krychli $3 \times 3 \times 3$.

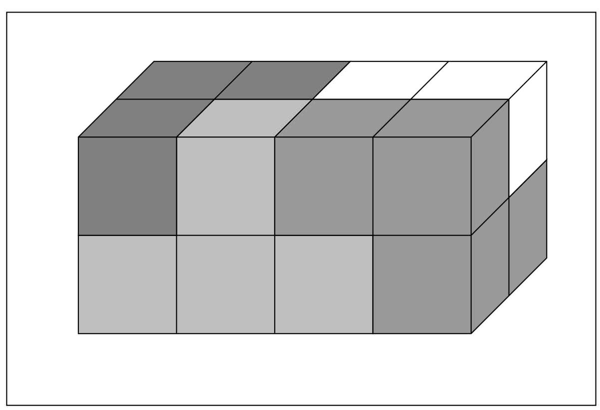


Příklad 7.15. Na obrázcích vidíte dva pohledy na jednu stavbu. Vaším úkolem je určit, kolik krychliček musíte do stavby doplnit, abyste dostali krychli $4 \times 4 \times 4$.

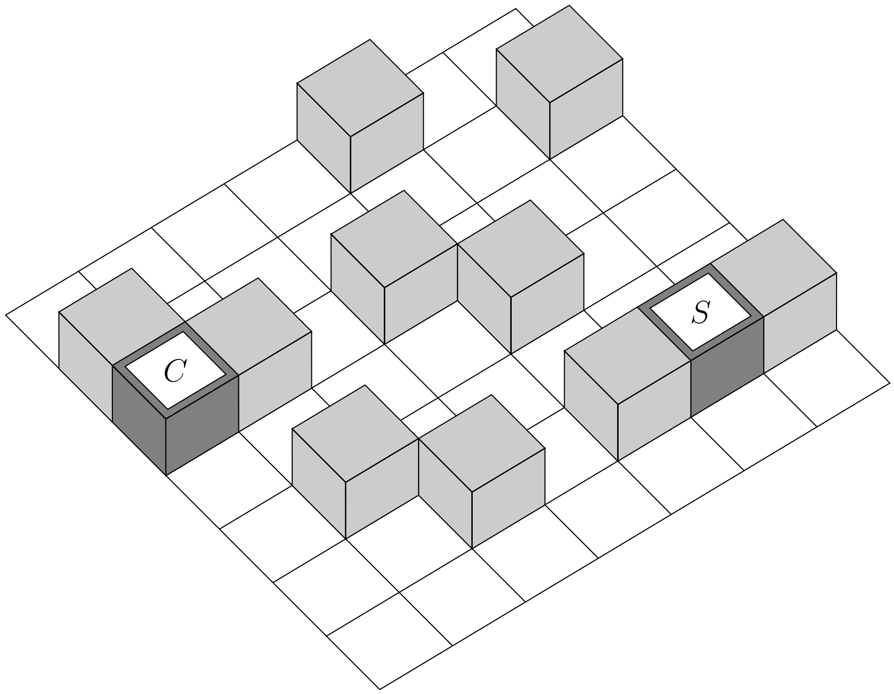




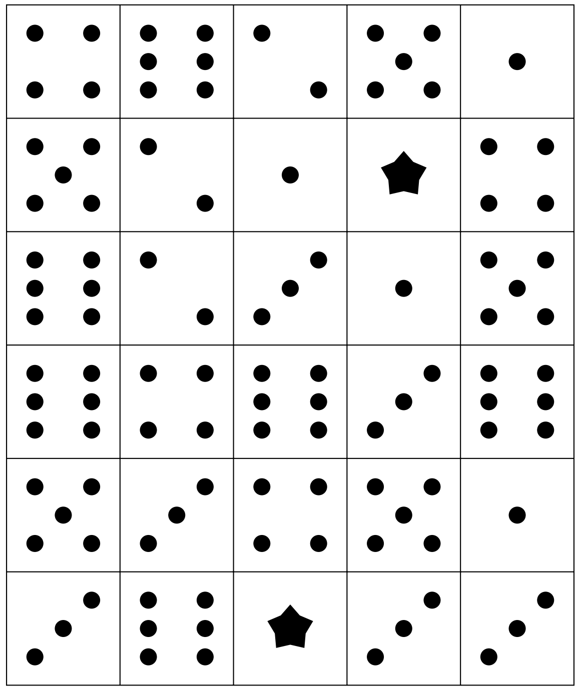
Příklad 7.16. Na obrázku je kvádr složený ze čtyř dílů, každý slepený ze čtyř krychliček. Vaším úkolem je určit tvar bílého dílu.



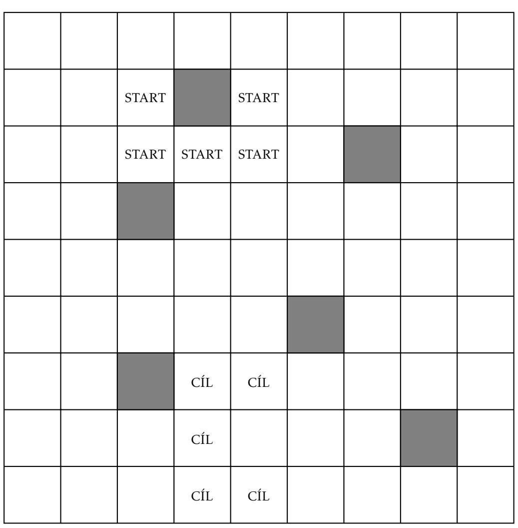
Příklad 7.17. Vaším úkolem je válet tmavě označenou krychlí ze startu S do cíle C tak, aby se bílá stěna neocitla nikdy směrem dolů. Šedé krychle jsou překážky, kterými se nesmí hýbat.

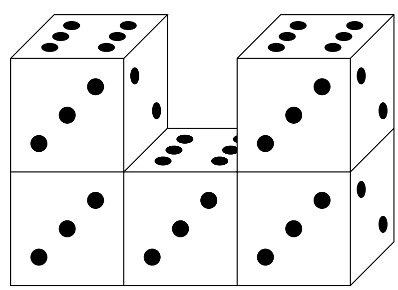


Příklad 7.18. Klasická hrací kostka je umístěna v levém horním rohu plánku tak, že na horní stěně je šestka a na přední stěně je čtyřka. Vaším úkolem je překlápět kostku až dojdete do cíle (pravý dolní roh). Překlápět však můžete pouze na políčko, které je označeno stejným číslem jako vrchní stěna kostky před překlopením (tj. na začátku musím překlápět na políčko označené šestkou). Na políčko označené hvězdičkou můžete překlopit bez ohledu na to, co máte na vrchu kostky.

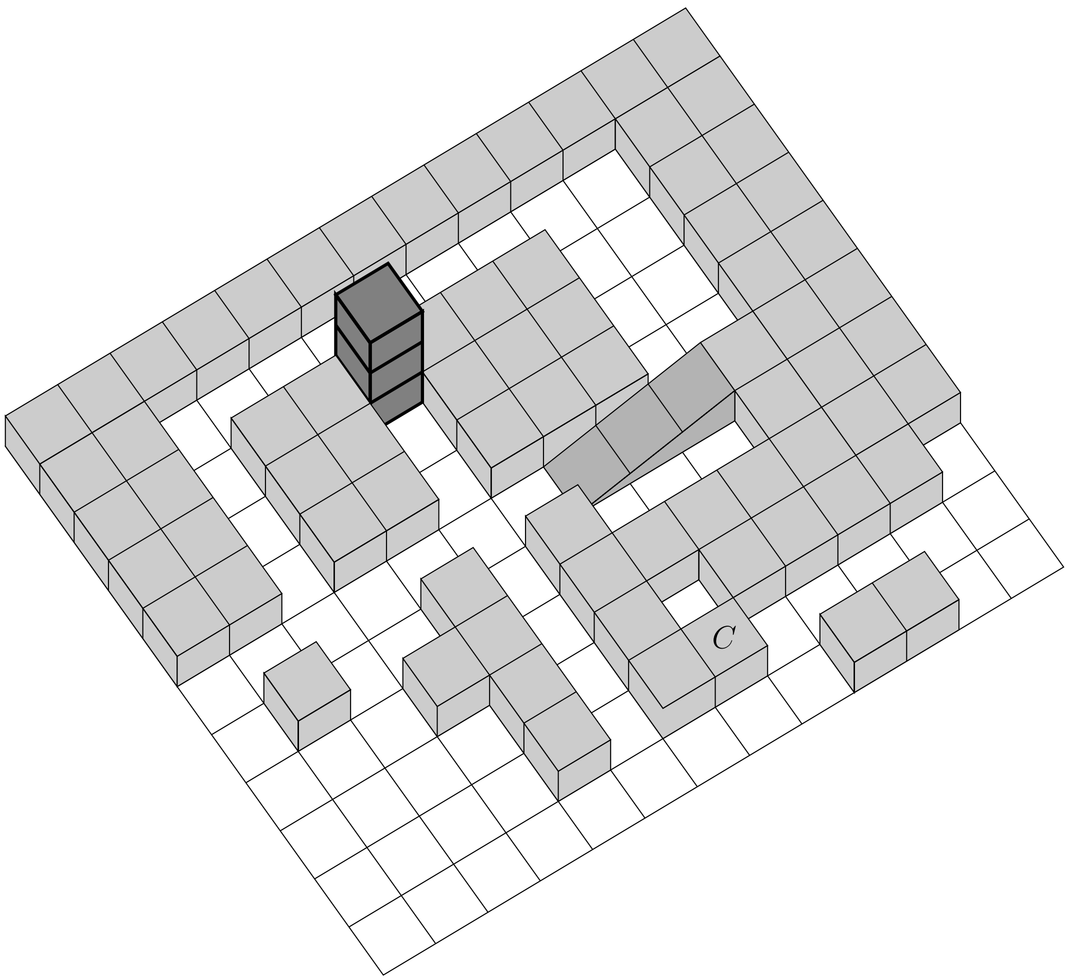


Příklad 7.19. Na tuto hru potřebujeme pět kostek, které slepíme do tvaru U tak, jak je na obrázku. položme tento tvar na plánek na pozici start, jak je nakreslené na plánku. Nyní překlápějme tak, abychom se dostali do cíle, přičemž stavba nikdy nesmí stát na označených políčkách, ale může je například přemosťovat.

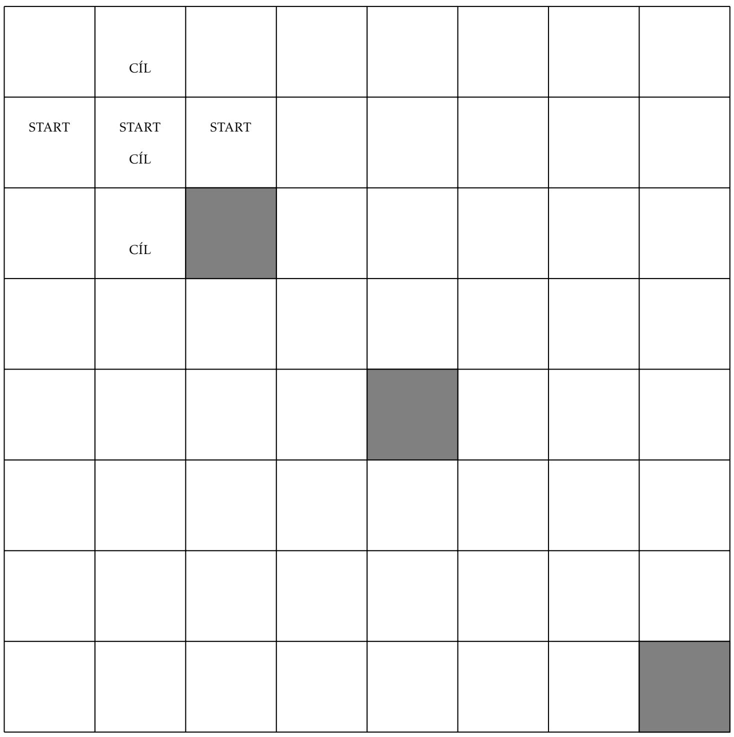


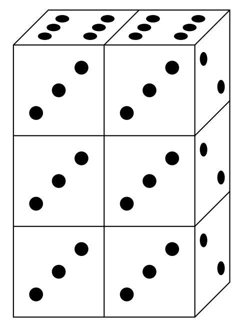


Příklad 7.20. Vaším úkolem je překutálet díl složený ze tří kostek do cíle C. Nejprve se musíte dokutálet k rampě, přičemž šedé kostky jsou překážky. Rampu můžete překonat pouze tak, že bude díl stát na výšku na bílém políčku přímo před rampu a poté se přes ní překutálí. Po šedých kostkách se kutálí úplně stejně, ale nikdy nesmí červený díl přesahovat na bílé pole, ale může jej přemosťovat.

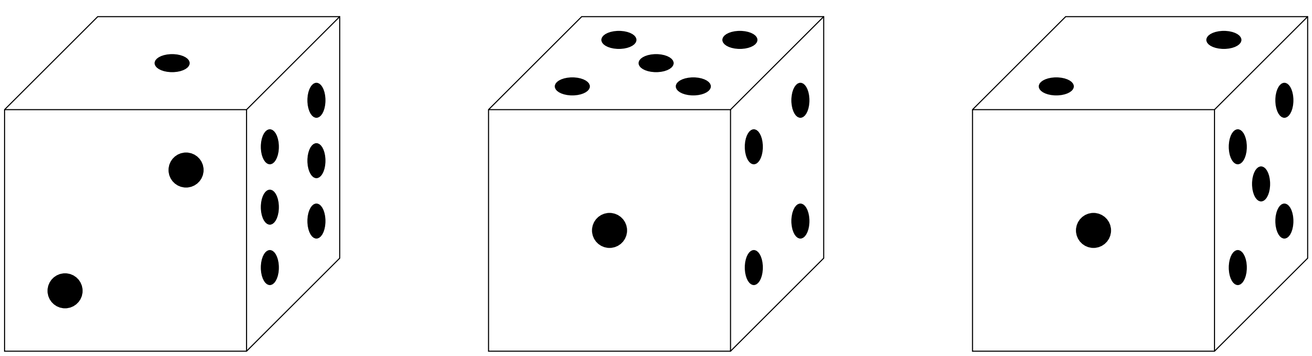


Příklad 7.21. Nyní máte daný díl složený ze šesti kostek, jak je nakreslené na obrázku. Postavme ho na plánek na pozice start. Naším úkolem je dostat se překlápěním do cíle, přičemž zbarvená pole jsou opět překážky.

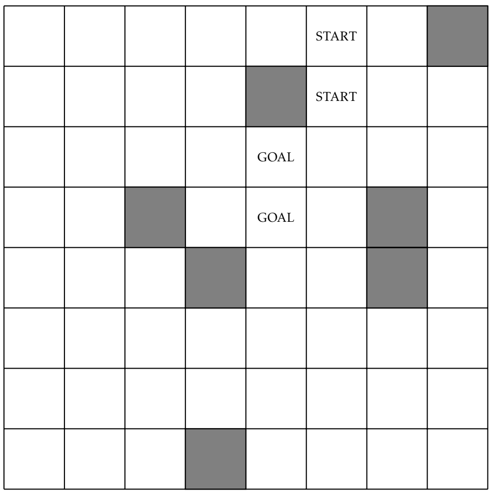


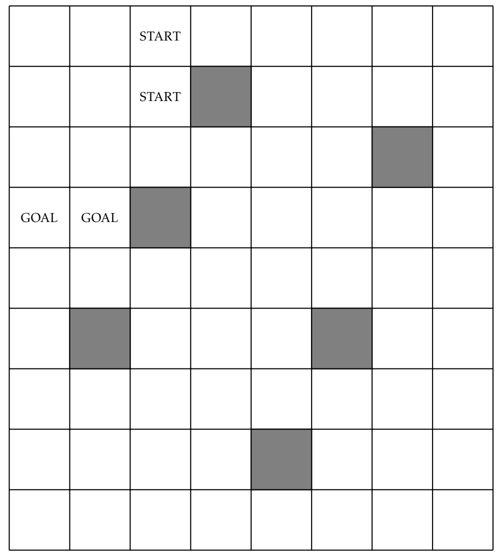


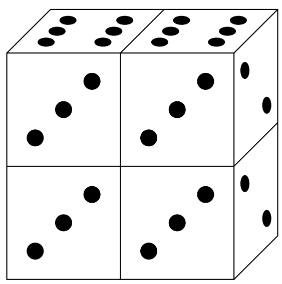
Příklad 7.22. Na obrázku vidíme tři různé pohledy na tutéž hrací kostku. Tato kostka však není klasická, neplatí na ní pravidlo o součtu protilehlých stěn. Určete, na kterých číslech kostka stojí v jednotlivých pohledech.



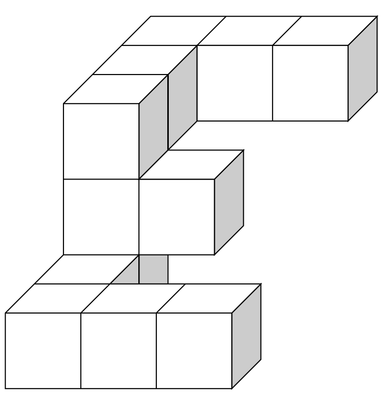
Příklad 7.23. Dílem slepeným ze čtyř hracích kostek překlápějte po plánku ze startu do cíle, přičemž vybarvená pole jsou překážky.

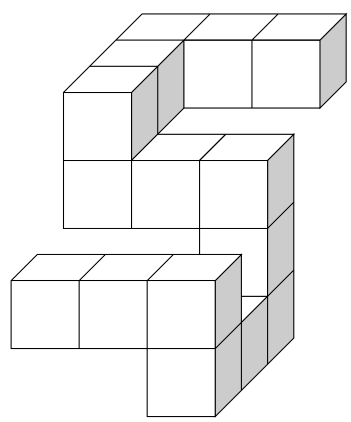






Příklad 7.24. Když se podíváte na uvedené stavby z jiného pohledu, uvidíte nějaká písmena. Dokážete je určit?

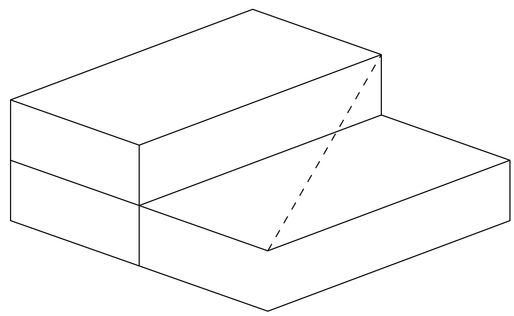




Řešení

Příklad 7.1. Úlohu je třeba řešit v prostoru a sirky sestavit do tvaru pravidelného čtyřstěnu.

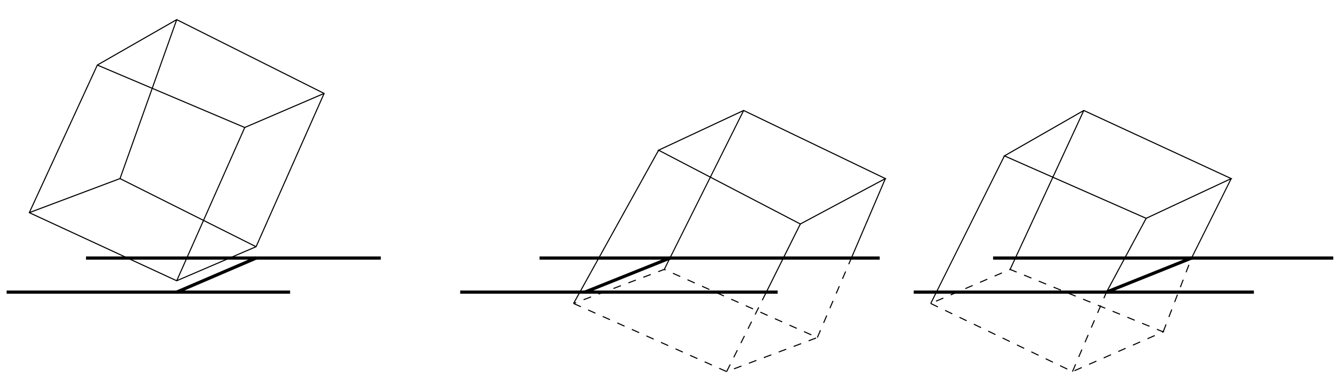
Příklad 7.2. Např. udělat ze tří cihel „schod" a úhlopříčku změřit.

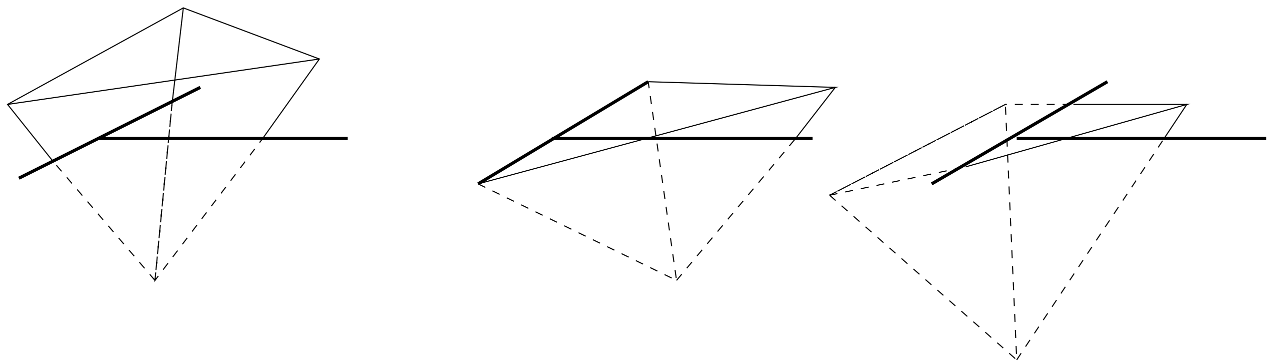


Příklad 7.3. Vyšrafovaný čtyřúhelník nemůže být rovinný – prodloužení jeho protějších stran (znázorněných plnou čarou) protínají přední hranu čtyřstěnu ve dvou různých bodech. Přitom ale rovina a přímka v ní neležící mají nejvýše jeden průsečík.

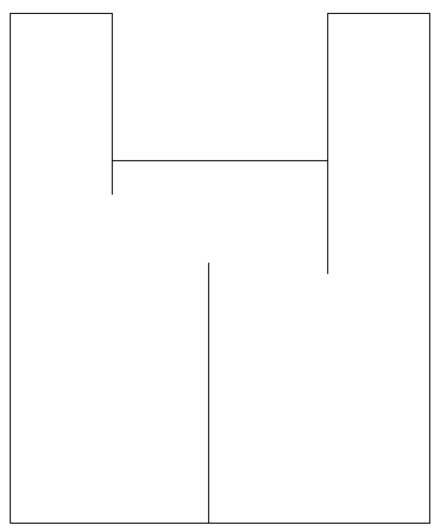
Příklad 7.4. Takové mnohostěny neexistují. Označíme-li vrcholy vnějšího čtverce obvyklým způsobem jako A, B, C, D a vrcholy vnitřního čtyřúhelníku jako A_1, B_1, C_1 a D_1, pak z řezù, rovnoběžných s rovinou $ABCD$, v prvním případě vidíme, že pro vzdálenosti a, b, c, d bodů A_1, B_1, C_1, D_1 od této roviny by muselo platit $a < b < c < d < a$, což samozřejmě nelze. Podobně v druhém případě jsou oba body B_1, D_1 rovině $ABCD$ blíže než oba body A_1, C_1, což ale znamená, že úsečky A_1C_1 a B_1D_1 se neprotínají a vnitřní čtyřúhelník tak nemůže být rovinný.

Příklad 7.5. Je to možné – viz obrázek.

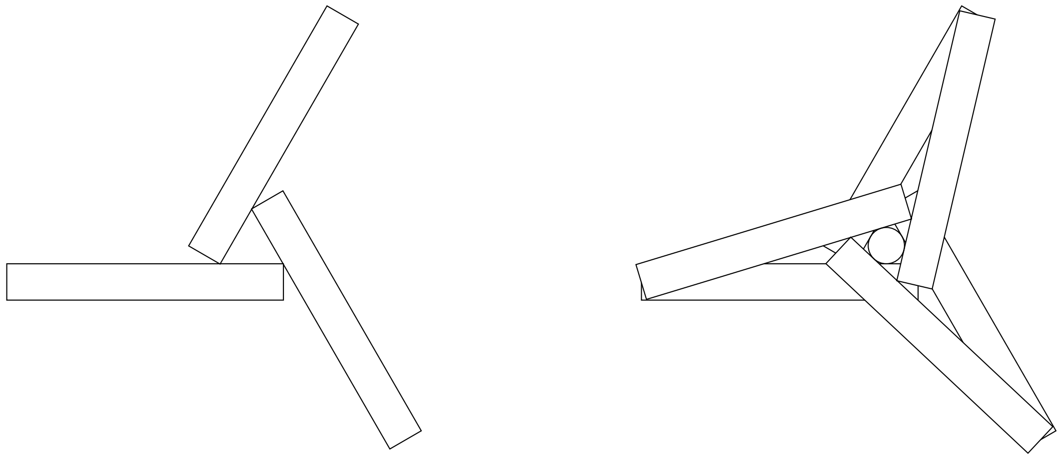




Příklad 7.6. Po vystřižení podle obrázku již na to jistě přijdete sami :-).



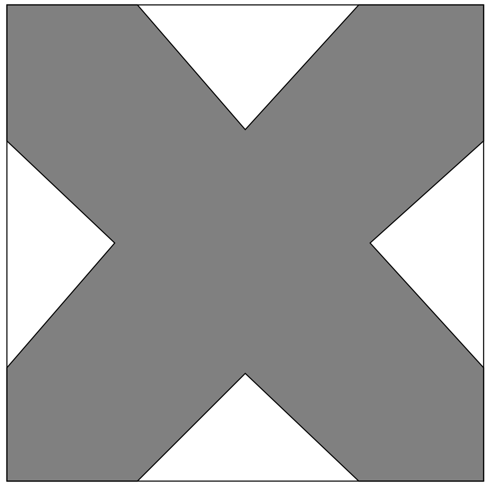
Příklad 7.7. Na obrázku nejprve vidíme, jak sestavit 3 tužky, další tři pak na ně položíme analogicky, tak aby se každé dvě dotýkaly. To je navíc možné udělat tak (viz druhý obrázek), že průměr kružnice opsané třem dotykovým bodům je týž jako průměr tužky. Díky tomu je možné do této „stavebnice" vsunout ještě sedmou tužku.



Příklad 7.8. Je to možné – dokonce několika způsoby. Stačí se nacházet přesně 1 kilometr jižně od rovnoběžky, jejíž délka je celočíselným dělitelem jednoho kilometru (např. délky $250\,\mathrm{m}$). Další možností je na začátku stát přímo na jižním pólu.

Příklad 7.9. Ano. Stačí prostor rozřezat na vrstvy, v lichých vrstvách umístit středy křížů do políček o souřadnicích $[2n, 2n+3k]$ a v sudých do políček $[2n+1, 2n+1+3k]$ pro libovolná $k, n \in \mathbb{N}$.

Příklad 7.10. Ano. Viz obrázek (strana čtverce je $2\sqrt{2} < 3$).



Příklad 7.11. 3

Příklad 7.12. E

Příklad 7.13. Lze postavit všechny stavby.

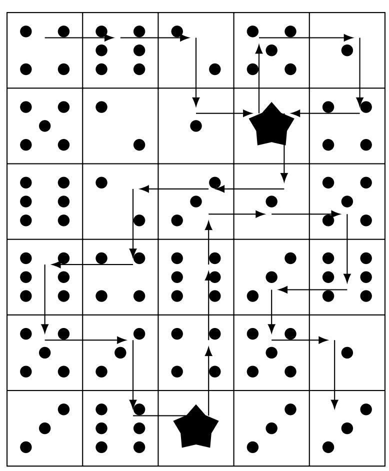
Příklad 7.14. 16

Příklad 7.15.

Příklad 7.16. S-tetromino

Příklad 7.17. $J - ZZZZ - S - Z - SS - VV - SS - Z - S - VV - J - Z - JJ - V - J - VV - S - V - S - Z - S - ZZZ - JJ - ZZ - S$

Příklad 7.18.



Příklad 7.19. Nejkratší cesta má 49 překlopení.

Příklad 7.22. Proti jedničce je trojka.

Příklad 7.24. E, S

Seznam obrázků

Literatura

[1] Říha, O.: Kruhová inverze. 1. vyd. Brno : Masarykova univerzita, 2010. 51 s. ISBN 978-80-210-5149-2.

[2] Kuřina, F: Umění vidět v matematice. SPN, Praha 1989.

[3] http://is.muni.cz/th/252591/prif_b/

[4] http://www.profuvsvet.ic.cz

[5] http://www.logicmazes.com

[6] Prasolov,V.V., Šarygin, I.F.: Stereometrické úlohy, Moskva, 1989.