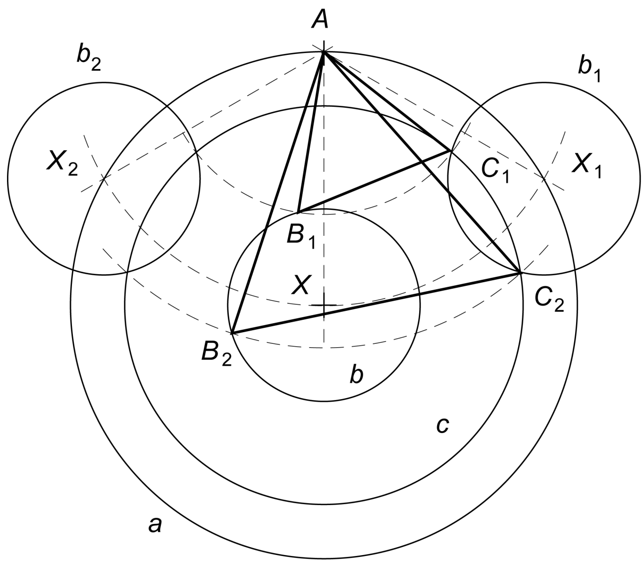
# Shodná zobrazení

## Otočení

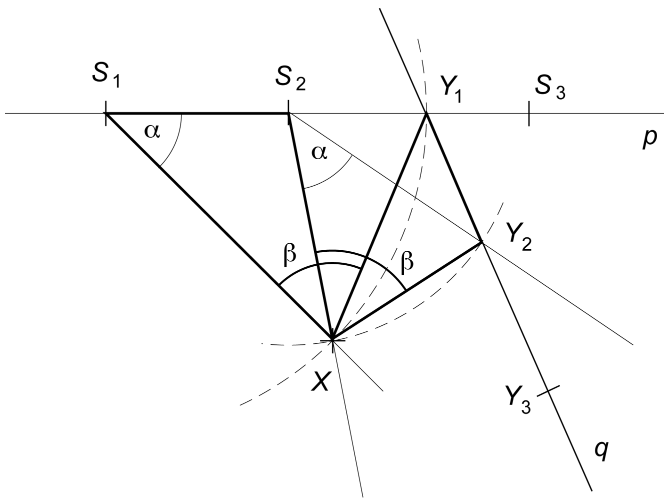
**Příklad 1.** Jsou dány tři různé soustředné kružnice $a$, $b$ a $c$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník $ABC$ tak, aby $A$ ležel na $a$, $B$ ležel na $b$ a $C$ ležel na $c$.

**Řešení.** Zvolíme vrchol $A$ na $a$. Pro bod $C$ pak platí, že je obrazem bodu $B$ v otáčení se středem v $A$ o úhel 60° (nebo −60°). Protože obecně obraz bodu $X$, který leží na množině $M$, leží na obrazu množiny $M$, bude bod $C$ – obraz bodu $B$ – ležet na na zobrazené množině $b$. Proto otočíme kružnici $b$ kolem středu $A$ o úhel 60°, nalezneme průsečíky této otočené kružnice s kružnicí $c$ a tyto průsečíky jsou možné vrcholy $C$. Vrcholy $B$ pak nalezneme otočením zpět.




**Příklad 2.** Je dán bod $A$ a dvě různé soustředné kružnice $b$ a $c$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník $ABC$ tak, aby $B$ ležel na $b$ a $C$ ležel na $c$. Řešení je zřejmé – je to zvolený bod $A$ v předchozím řešení.

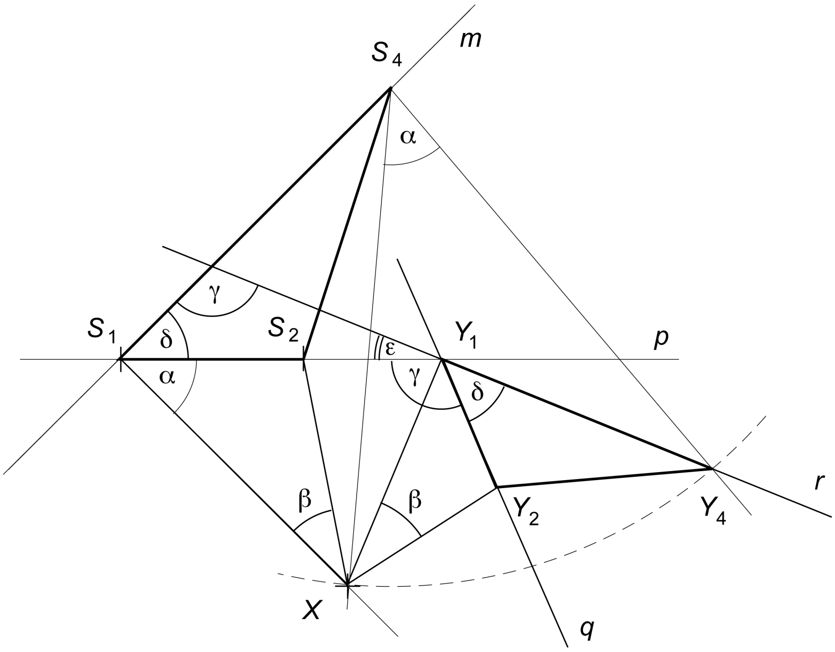
**Příklad 3.** Je dána přímka $p$ a bod $X$. Na přímce $a$ je libovolně dán bod $S$. Uvažujme bod $Y$ – obraz bodu $X$ v otáčení se středem v bodě $S$ o úhel $\alpha$. Dokažte, že množina všech bodů $Y$ je přímka.



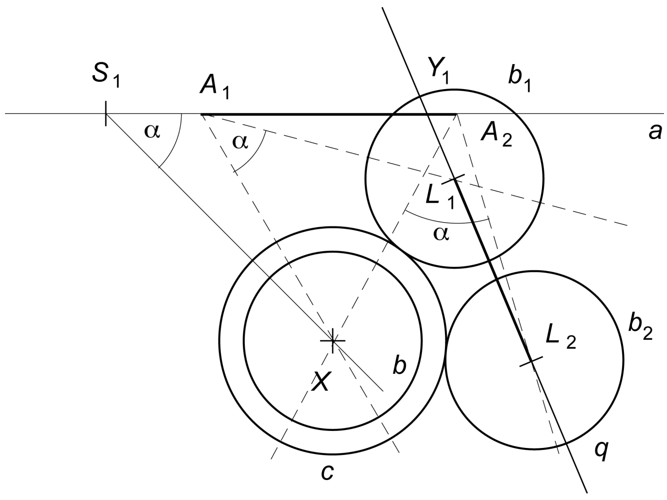

**Řešení.** Na přímce $p$ jistě leží bod $S_1$ pro který platí, že přímka $S_1X$ svírá s přímkou $p$ právě úhel $\alpha$. Zvolme tento bod $S_1$, obraz bodu $X$ v otočení se středem v $S_1$ o úhel $\alpha$ označme $Y_1$. Zvolme dále na $p$ libovolný bod $S_2$, obraz bodu $X$ v otočení se středem v $S_2$ o úhel $\alpha$ označme $Y_2$. Trojúhelníky $XS_1Y_1$ a $XS_2Y_2$ jsou oba rovnoramenné s vnitřním úhlem při hlavním vrcholu rovným $\alpha$. Proto jsou podobné. Z této podobnosti vyplývá, že a mají shodné i vnitřní úhly při základně – označme je $\beta$, proto jsou shodné i úhly $\sphericalangle S_1XS_2$ a $\sphericalangle Y_1XY_2$. Z podobnosti trojúhelníků $XS_1Y_1$ a $XS_2Y_2$ dále plyne rovnost poměrů $|XY_1| : |S_1X| = |XY_2| : |S_2X|$ (délka základny k délce ramena), proto jsou podobné trojúhelníky $S_1XS_2$ a $Y_1XY_2$ podle věty sus o podobnosti trojúhelníků. Odtud plyne, že velikost úhlu $\sphericalangle XY_1Y_2$ se rovná velikosti úhlu $\sphericalangle XS_1S_2 = \alpha$. Zvolíme-li na přímce $p$ další bod $S_3$, stejným postupem ukážeme, že i velikost úhlu $\sphericalangle XY_1Y_3$ se rovná $\alpha$. Body $Y_1$, $Y_2$ a $Y_3$ tedy leží na přímce. Důkaz je hotov.

Podobně bychom mohli postupovat, kdybychom zvolili bod $S_4$ mimo přímku $p$ a chtěli ukázat, že množina obrazů bodů $X$ ve středových souměrnostech se středy ve všech bodech trojúhelníku $S_1S_2S_4$ je trojúhelník $Y_1Y_2Y_4$ s trojúhelníkem $S_1S_2S_4$ podobný. Vedli bychom přímku $m = S_1S_4$ a obdobně ukázali, že množina všech obrazů bodů $X$ ve středových souměrnostech se středy na přímce $m$ je přímka $r$, která s $m$ svírá úhel $\gamma$, stejný úhel, jako svírá přímka $q$ s přímkou $p$. Odchylka přímek $p$ a $m$, označme ji $\delta$, se tak musí rovnat odchylce přímek $q$ a $r$ (v obrázku vidíme, že $\gamma+\delta+\epsilon = 180°$, bod $S_1$ je průsečíkem přímek $m$ a $p$, bod $Y_1$ proto musí být průsečíkem přímek $q$

a $r$). Odtud už bezprostředně vyplyne, že trojúhelníky $S_1S_2S_4$ a $Y_1Y_2Y_4$ jsou podobné, protože koeficient k podobnosti je poměr délek základny a ramena rovnoramenného trojúhelníku s vnitřním úhlem při hlavním vrcholu o velikosti $\alpha$, tedy $k = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$, nezávisí tedy na volbě středu otáčení, tedy na volbě bodu $S$.

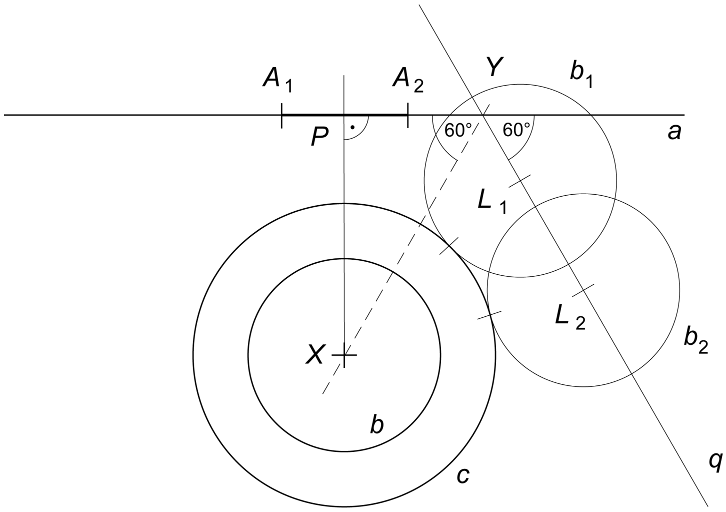



K řešitelnosti úlohy:




Úloha má řešení (pro obecný úhel $\alpha$), když bude bod $A$ zvolen na úsečce $A_1A_2$. Na obrázku jsou pak nakresleny krajní polohy otočených kružnic $b$, pro které má úloha vždy jedno řešení. Z podobnosti, kterou jsme odvodili v předchozím důkaze plyne, že trojúhelníky $XA_1A_2$ a $XL_1L_2$ jsou podobné, koeficient podobnosti je $k = 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. Geometricky tedy úsečku $A_1A_2$ najdeme tak, že najdeme mezní polohy kružnic $b_1$ a $b_2$ a sestrojíme trojúhelník $XA_1A_2$ podobný s trojúhelníkem $XL_1L_2$ tak, aby základna $A_1A_2$ ležela na $a$. Výpočet trigonometricky pomocí této podobnosti.

V našem konkrétním případě, kdy má úhel otáčení velikost 60°, je podobnost shodností, proto $A_1A_2 = L_1L_2$ a vzdálenost $|aX| = |qX|$. Konstrukce: Sestrojíme kružnice $b_1$ a $b_2$, které mají střed na přímce $q$ a mají s kružnicí $c$ vnější dotyk. Jejich středy jsou body $L_1$ a $L_2$. Úsečku $L_1L_2$ přeneseme na přímku $a$ (získáme hledanou úsečku $A_1A_2$) tak, aby střed úsečky $A_1A_2$ byl patou kolmice spuštěné z bodu $X$ na přímku $a$.

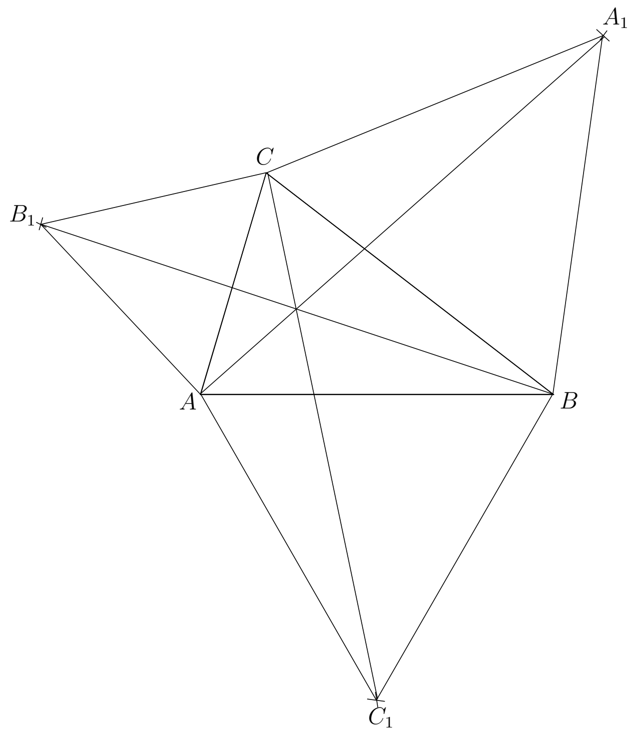



Poznamenejme, že při otáčení opačným směrem bude situace identická, jen přímka $q$ bude ležet vlevo od kružnic $b$ a $c$. Získáme tutéž úsečku $A_1A_2$. Dále můžeme říci, že pro nalezení úsečky $A_1A_2$ byla konstrukce přímky $q$ zbytečná, bylo možné nalézt body $L_1$ a $L_2$ přímo na přímce $a$ – byly by to přímo body $A_1$ a $A_2$. Délku úsečky $A_1A_2$ určíme jako dvojnásobek délky úsečky $PA_2$, kterou vypočítáme pomocí Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku $XPA_2$. $|XP|$ je daná délka ze zadání (určuje umístění přímky $a$ vzhledem ke kružnicím $b$ a $c$) a $|XA_2|$ má délku rovnu součtu poloměrů kružnic $b$ a $c$.

**Příklad 4.** Na stranách trojúhelníka $ABC$ jsou vně sestrojeny rovnostranné trojúhelníky $A_1CB$, $B_1AC$ a $AC_1B$. Dokažte, že $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$.

**Řešení.** Při otočení se středem $C$ o úhel 60° v záporném smyslu se bod $A$ zobrazí na bod $B_1$ a bod $A_1$ na bod $B$. Úsečka $AA_1$ se proto zobrazí na úsečku $B_1B$. Dále při otočení se středem $A$ o úhlem 60° v záporném smyslu se bod

$B$ zobrazí na bod $C_1$ a bod $B_1$ na bod $C$. Úsečka $BB_1$ se tedy zobrazí při tomto otočení na úsečku $C_1C$. Odsud již vyplývá, že $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$.




# Středová souměrnost

**Příklad 5.** Sestrojte trojúhelník $ABC$, je-li dáno $t_a$, $m_b$ a $m_c$, kde $m_b$ je množina (podmínka) pro bod $B$ a $m_c$ je množina (podmínka) pro bod $C$.

Možný postup řešení: Umístíme těžnici $t_a$ (úsečku $AS_a$, $S_a$ označíme střed strany $BC$), dále sestrojíme množinu $m_b$ a množinu $m_c$ – podle podmínek úlohy. Protože je $S_a$ střed strany $BC$, je bod $C$ obrazem bodu $B$ ve středové souměrnosti se středem právě v $S_a$. Je zřejmé, že pokud bod $X$ leží na množině $M$, leží jeho obraz v libovolném zobrazení na obrazu množiny $M$ v tomto zobrazení. Proto leží bod $B$ – obraz bodu $C$ na obrazu množiny $m_b$ v uvažované středové souměrnosti se středem v bodě $S_a$. Sestrojíme tedy tento obraz množiny $m_b$, nalezneme jeho společné body s množinou $m_c$ a tyto společné body jsou body $C$ – vrcholy trojúhelníku $ABC$. Odpovídající vrcholy pak najdeme snadno tak, že použijeme $S_a$ jako střed strany $BC$. Řešitelnost úlohy závisí na počtu bodů $C$.

**Příklad 6.** Sestrojte trojúhelník $ABC$, je-li dáno

- $t_a$, $t_b$ a $t_c$. $m_b$ je pak kružnice $k(T, \frac{2}{3}t_b)$, $m_c$ je pak kružnice $l(T, \frac{2}{3}t_c)$.
- $t_a$, $t_b$ a $\gamma$. $m_b$ je pak kružnice $k(T, \frac{2}{3}t_b)$, $m_c$ je množina všech bodů $X$, ze kterých je vidět úsečku $AS_a$ pod úhlem $\gamma$ – oblouk.
- $t_a$, $\beta$ a $\gamma$. $m_b$ je pak množina všech bodů $X$, ze kterých je vidět úsečku $AS_a$ pod úhlem $\beta$ – oblouk, $m_c$ je množina všech bodů $Y$, ze kterých je vidět úsečku $AS_a$ pod úhlem $\gamma$ – druhý oblouk.
- $t_a$, $t_b$ a $v_b$. $m_b$ je pak kružnice $k(T, \frac{2}{3}t_b)$, $m_c$ je tečna ke kružnici $l(S_a, \frac{1}{2}v_b)$ vedená bodem $A$ – bod $S_a$ má od strany $b$ poloviční vzdálenost než bod $B$.
- $t_a$, $\beta$ a $v_b$. $m_b$ je pak množina všech bodů $X$, ze kterých je vidět úsečku $AS_a$ pod úhlem $\beta$ – oblouk, $m_c$ je tečna ke kružnici $l(S_a, \frac{1}{2}v_b)$ vedená bodem $A$ – bod $S_a$ má od strany $b$ poloviční vzdálenost než bod $B$.
- $t_a$, $v_b$ a $v_c$. $m_b$ je tečna ke kružnici $k(S_a, \frac{1}{2}v_b)$ vedená bodem $A$ – bod $S_a$ má od strany $b$ poloviční vzdálenost než bod $B$, $m_c$ je tečna ke kružnici $l(S_a, \frac{1}{2}v_c)$ vedená bodem $A$ – bod $S_a$ má od strany $c$ poloviční vzdálenost než bod $C$.

**Příklad 7.** Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dáno $|AS_b|$ ($S_b$ je střed $BC$), $v_a$ (výška na úsečku $AB$), $|AC|$.

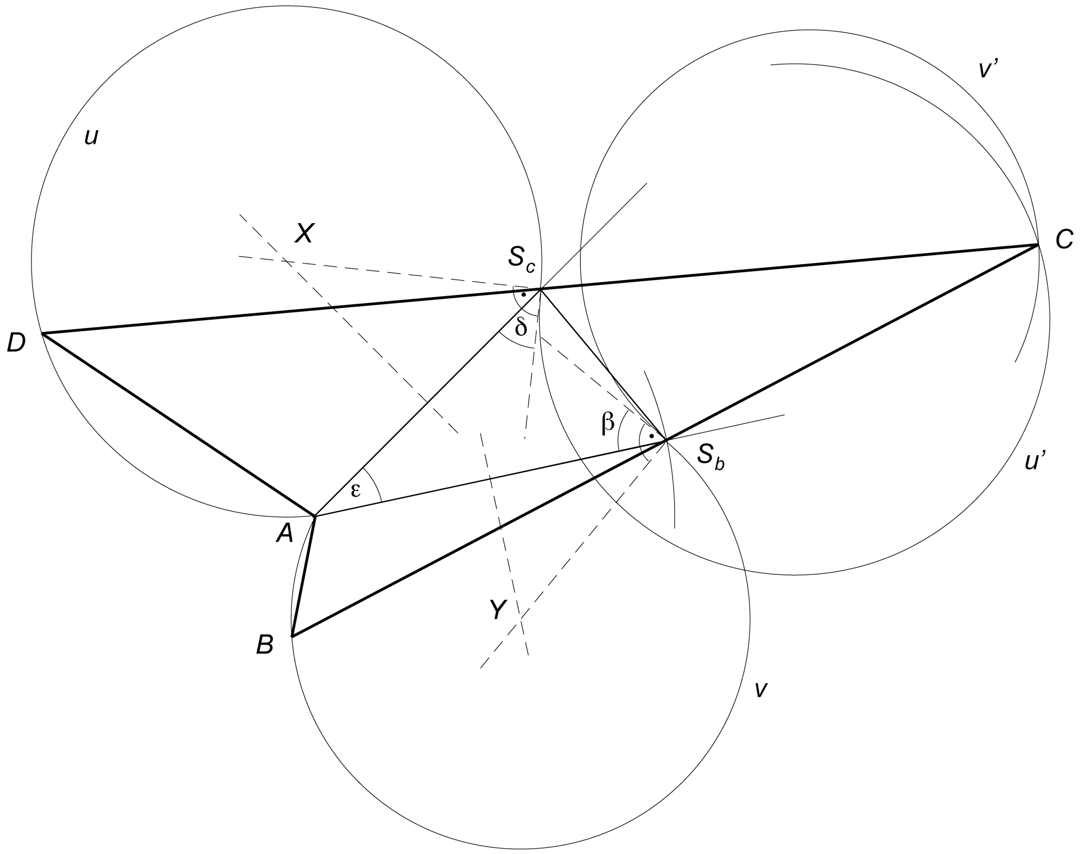
**Řešení.** Zde sestrojíme nejdříve trojúhelník $ABC$, kde vycházíme z jeho „těžnice“ $AS_b$, jedna z množin je pak tečna ke kružnici $k(S_b, \frac{1}{2}v_a)$ vedená bodem $A$ – bod $S_b$ má od strany $AB$ poloviční vzdálenost než bod $C$, druhá z množin je pak kružnice $l(A, |AC|)$. Vrchol $D$ najdeme pomocí rovnoběžnosti.

**Příklad 8.** Sestrojte lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$, je-li dáno $|CS_a|$ ($S_a$ je střed $AB$), velikost ostrého úhlu $\sphericalangle CAB$, $\beta$ a $\delta$.

**Řešení.** Nejdříve setrojíme trojúhelník $ABC$, kde známe těžnici a dva vnitřní úhly – začneme těžnicí, množiny, jejichž společné body po zobrazení budeme hledat jsou oblouky určené vnitřními úhly $\beta$ a $\sphericalangle CAB$, vrchol $D$ pak snadno najdeme pomocí rovnoběžky s $AB$ vedené bodem $C$ a např. pomocí polopřímky vedené bodem $A$, která s $AB$ svírá úhel $180° - \delta$.

**Příklad 9.** Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno $|AS_b|$ ($S_b$ je střed $BC$), $|AS_c|$ ($S_c$ je střed $CD$), $\beta$, $\delta$ a velikost úhlu $\epsilon = \sphericalangle S_bAS_c$.

**Řešení.** Nejdříve sestrojíme trojúhelník $S_bAS_c$ podle věty *sus*. Vrchol $D$ leží na množině $M$ všech bodů $X$, ze kterých je úsečka $AS_c$ vidět pod úhlem $\delta$ (oblouk), vrchol $B$ leží na množině $N$ všech bodů $Y$, ze kterých je úsečka $AS_b$ vidět pod úhlem $\beta$ (oblouk). Vrchol $C$ pak leží na zobrazené množině $M$ ve středové souměrnosti se středem $S_c$ a na zobrazené množině $N$ ve středové souměrnosti se středem $S_b$ (tedy v průniku těchto obrazů). Vrcholy $B$ a $D$ pak snadno najdeme pomocí polopřímek $CS_b$ a $CS_c$. Konstrukce je na obrázku.

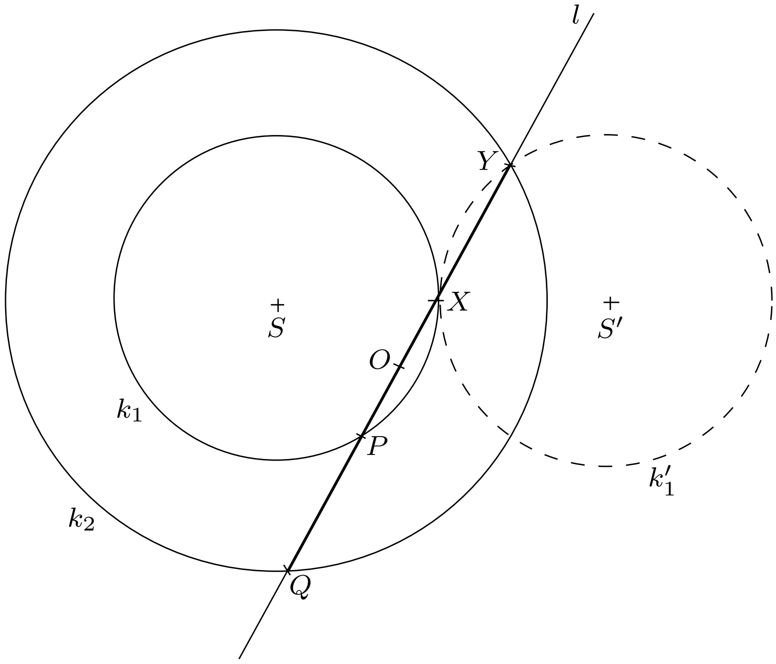



Na obrázku je sestrojeno pouze jedno ze čtyř řešení. Je třeba vykreslit obě dvojice oblouků, zobrazené dvojice oblouků pak budou mít až čtyři společné body.

**Příklad 10.** Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1$ a $k_2$. Sestrojte přímku $l$, na které tyto kružnice vytínají tři shodné úsečky.

**Řešení.** Označme $r_1$ poloměr kružnice $k_1$ a $r_2$ poloměr kružnice $k_2$. Nechť je pro jednoznačnost $r_1 < r_2$. Zvolíme na kružnici $k_1$ libovolný bod $X$. Buď $k'_1$ obraz kružnice $k_1$ při symetrii se středem $X$ a $Y$ průsečík kružnic $k'_1$ a $k_2$.

Ukážeme, že $XY$ je hledaná přímka $l$. Označme $P \neq X$ průsečík přímky $XY$ s kružnicí $k_1$, $Q \neq Y$ průsečík přímky $XY$ s kružnicí $k_2$ a $O$ střed úsečky $YQ$, a tedy i úsečky $XP$ (tedy $|YO| = |QO| \wedge |PO| = |XO|$). Bod $Y$ je symetrický s bodem $P$ podle středu $X$ (tedy $|XY| = |XP|$). Odsud dostáváme, že $|QO| - |PO| = |YO| - |XO|$, to znamená, že $|XY| = |QP|$, a tedy $|YX| = |XP| = |PQ|$.

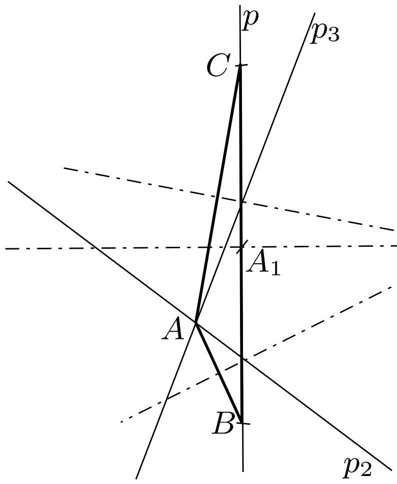



# Osová souměrnost

**Příklad 11.** Jsou dány tři přímky $l_1$, $l_2$ a $l_3$, které se protínají v jednom bodě, a bod $A_1$ ležící na přímce $l_1$. Sestrojte trojúhelník $ABC$ tak, aby bod $A_1$ byl středem jeho strany $BC$ a přímky $l_1$, $l_2$ a $l_3$ byly osami jeho stran.

**Řešení.** Bodem $A_1$ veďme přímku $p$, která je na $l_1$ kolmá. Buď $p_2$ přímka, která je osově souměrná s přímkou $p$ podle přímky $l_2$.Buď $p_3$ přímka, která je osově souměrná s přímkou $p$ podle přímky $l_3$. Vrchol $A$ hledaného trojúhelníka $ABC$ je průsečíkem přímek $p_2$ a $p_3$. Body $B$ a $C$ pak leží na přímce $p$, přičemž

$B$ je osově souměrný s bodem $A$ podle přímky $l_2$ a bod $C$ je osově souměrný s bodem $A$ podle přímky $l_3$.




**Příklad 12.** Je dána přímka $MN$ a dva body $A$ a $B$ ležící v jedné polorovině vzhledem k $MN$. Sestrojte na přímce $MN$ bod $X$ tak, aby $|\sphericalangle AXM| = 2|\sphericalangle BXN|$.

**Řešení.** Předpokládejme, že je bod $X$ sestrojen. Buď $B'$ bod, který je osově souměrný s bodem $B$ podle přímky $MN$. Kružnice se středem $B'$ a poloměrem $|AB'|$ protíná přímku $MN$ v bodě $A'$. Buď $O$ střed úsečky $AA'$. Přímka $B'O$ je tedy osou úhlu $\sphericalangle AB'A'$. Potom ale i $B'X$ musí být osou úhlu $\sphericalangle AB'A'$, neboť platí $\frac{1}{2}|\sphericalangle AXM| = |\sphericalangle MXO| = |\sphericalangle B'XN| = |\sphericalangle BXN|$. Odsud přímo plyne rovnost $|\sphericalangle AXM| = 2|\sphericalangle BXN|$.

Bod $X$ tedy nalezneme jako průsečík přímek $B'O$ a $MN$, kde $O$ je střed úsečky $AA'$.